# Testes Assintóticos

pag 392

**Exemplo 6.3.1** Suponha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $(X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta))$

$$p(x;\theta) = \beta^{\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)/\Gamma(\alpha) \quad ; x>0 \; ; \alpha>0, \beta>0$$

mostramos q' $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ $\exists$ mas $\hat{\theta}$ não tem solução explícita.

Assim se fizermos $\lambda(x) = \dfrac{\sup(p(x,\theta) : \theta \in \Theta)}{\sup(p(x,\theta) : \theta \in \Theta_0)} = (*)$

testando $H : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$ ; $\Theta_1 = \Theta - \Theta_0$.

que apresentam soluções derivaveis mas estatísticas $t$ e $F$ no geral não pode ser aplicado aqui. Visto q' $p(x, \hat{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \hat{\theta})$ não está disponível neste modelo. Supor por exemplo q' desejamos testar

$$H : \underbrace{\alpha = 1}_{\text{exponencial}} \quad \text{vs} \quad H_1 : \alpha \neq 1$$

neste caso $\hat{\beta}(EMV) = \frac{1}{\bar{X}}$ ; $p(x; (1, \frac{1}{\bar{x}}))$ é o denominador em $(*)$

Mesmo assim não podemos derivar os valores críticos de $\lambda(x)$ de forma analítica.

Usaremos a aproximação do tipo: $2 \log \lambda(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_d$

Exemplo 6.3.2 Modelo linear normal de variância conhecida

$Y_1 \dots Y_n \quad Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_0^2) \quad \sigma_0$ conhecida.

... exercícios Exemplos 6.3.2 – 6.3.3

Teorema 6.3.1 Suponho q certas condições de uniformidade são validas (pag 384) na função $\ell(x,\theta) = \log p(x|\theta)$, então sob a Hipótese

$H: \theta = \theta_0$, $\quad 2 \log \lambda(X) = 2\left[\ell_n(\hat{\theta}_n) - \ell_n(\theta_0)\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_r$

sendo $X_1 \dots X_n$ a a desde $p(x|\theta)$; $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^s$; $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$.

$$\ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log p(x_i|\theta).$$

dem: $\hat{\theta}_n$ é o EMV ie. $D_\theta \ell_n(\theta) = 0$; $D_\theta$: derivada de $\ell_n$ em relação ao $\theta$.

Consideremos uma exp. de $\ell_n(\theta)$ por volta de $\hat{\theta}_n$ e avaliado no $\theta = \theta_0$

$$2\left[\ell_n(\hat{\theta}_n) - \ell_n(\theta_0)\right] = n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^T I_n(\theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta_0).$$

$\downarrow$

Verifique exercício

Prova algum valor $\theta_n^*$ tal que $|\theta_n^* - \hat{\theta}_n| \leq |\hat{\theta}_n - \theta_0|$ e sendo

$$I_n(\theta) = \left\| -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log p(x_i, \theta) \right\|_{r \times r}$$

por normalidade assintotica, resulta $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, I^{-1}(\theta_0))$

(veja teo 6.2.2) matriz de inf de Fisher

Alem disso $|\theta_n^* - \theta_0| \leq |\theta_n^* - \hat{\theta}_n| + |\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq 2\,|\hat{\theta}_n - \theta_0|$.

pelas condições de regularidade $A_3$ e $A_4$, especificamente pela consistência de $A_4$ resulta $I_n(\theta_n^*) \xrightarrow{P} E(I_n(\theta_0)) = I(\theta_0)$ (Exercício)

logo $$2\left[\ell_n(\hat{\theta}_n) - \ell_n(\theta_0)\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} V^T I(\theta_0) V, \quad V \sim N(0, I^{-1}(\theta_0))$$

Pelo $\underbrace{\text{lemma 3.6.2 (pag 508)}}_{\text{exercício}} \Rightarrow V^T I(\theta_0) V \sim \chi^2_r$. *

Consequencia do Teorema a) $H: \theta = \theta_0$ é rejeitado se $2\log\lambda(X) \geq \underbrace{\chi_{r(1-\alpha)}}_{1-\alpha \text{ quantil}}$

b) região de confiança $(1-\alpha)$: $\left\{\theta_0 : 2\left[\ln(\hat{\theta}_n) - \ln(\theta_0)\right] \leq \chi_{r(1-\alpha)}\right\}$

Hip $H: \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$; $\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta_j = \overset{\text{dados}}{\theta_{0,j}}, j = q+1, \dots, r\}$

o parametro $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$ onde $\theta^{(1)} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^T$, $\theta^{(2)} = (\theta_{q+1}, \dots, \theta_r)^T$

Teorema 6.3.2: Suponha q' valem as condições de regularidade $A_0 - A_6$ na função $\ell(x|\theta) = \log p(x|\theta)$, $\theta \in \Theta$. Seja $P_0$ o modelo $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ levando em conta a reparametrização $\theta^{(1)} = (\theta_1, \dots, \theta_q)$

$\hat{\theta}_0^{(1)}$ é o EMV de $\theta^{(1)}$ em $H$. $\hat{\theta}_0^{(1)}$ verifica a condic $A_6$ para $P_0$

Seja $\hat{\theta}_{0,n}^T = (\hat{\theta}_0^{(1)}, \underbrace{\theta_0^{(2)}}_{(\theta_{0,q+1}, \dots, \theta_{0,r})^T})$. Então em $H: \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$

$\Theta_0 = \{\theta \in \Theta : \theta_j = \theta_{0j}, j = q+1, \dots, r\}$

$$2\log\lambda(x) = 2\left[\ln(\hat{\theta}_n) - \ln(\hat{\theta}_{0,n})\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_{r-q}$$

Note que $\Theta_0$ é um conjunto de valores de $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$ que fixa os valores de $\theta_j$ $j = q+1, \dots, r$. Ou seja

$$\Theta_0 = \left\{\theta \in \Theta,\ \theta_j = \theta_{0,j},\ j = q+1, \dots, r\right\} \quad \underset{\text{denota}}{\theta^T} = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}); \ \theta^{(1)} = (\theta_1, \dots, \theta_q)^T, \ \theta^{(2)} = (\theta_{q+1}, \dots, \theta_r)^T$$

$\theta_0^{(2)} = (\theta_{0,q+1}, \dots, \theta_{0,r})^T$

Notas: situações de casos $H_0$: com especificos valores nas coordenadas de $\theta$ veja exemplo 6.3.2, 6.3.3

Testes associados: (i) estatístico de Wald

Considere o Teorema 6.2.2, em particular: sob condições $A_0 - A_5$ em $f(x;\theta) = \log(p(x;\theta))$ se $\hat{\theta}_n$ é o estimador de Máxima Verossimilhança $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0, I^{-1}(\theta))$ (*)

$\theta$: r-dim.

O resultado B.7.1(a) garante que se em $I(\theta)$ usarmos o EMV $\hat{\theta}_n$, temos $I(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} I(\theta)$ (**)

logo, Slutsky (*) & (**) permite estabelecer:

$$n(\hat{\theta}_n - \theta)^T I(\hat{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} V^T I(\theta) V$$

onde $V$ é $N_r(0, I^{-1}(\theta))$

já o corolario B.6.2 garante que $V^T I(\theta) V \sim \chi^2_r$

Assim é possível definir a estatístico de Wald em $\theta = \theta_0$

$$W_n(\theta_0) = n(\hat{\theta}_n - \theta_0)^T I(\theta_0)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$$

Procedimento de Wald se $H: \theta = \theta_0$ vs $K: \theta \neq \theta_0$

rejeitamos $H_0$ se $W_n(\theta_0) \geq \chi^2_{r;(1-\alpha)}$ quantil $1-\alpha$ de uma dist $\chi^2_r$.

Notas

① para estimar $I(\theta_0)$ podemos usar $I(\hat{\theta}_n)$ outros quais? justifique!

② Existem variantes do teste de Wald no marco do Teorema 6.3.2 onde devemos considerar uma alteração nos graus de liberdade da distribuição $\chi^2$ Veja teorema 6.3.4

③ Região de confiança: $\{\theta : W_n(\theta) \leq \chi^2_{r,1-\alpha}\}$.

— o —

Um procedimento puramente baseado na lei limite a estatístico de Rao:

Considere a quantidade $Z_n = \frac{1}{n} D l_n(\theta_0)$ onde $l_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \log(P(x_i, \cdot))$ é possível provar que

$$\sqrt{n} \cdot Z_n(\theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0, I(\theta_0)).$$

pois este fato decorre do Teorema central do limite aplicado à média. $Z_n$; $E\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log(P(x,\theta))\right) = 0$ ✓ (log natural).

$Var\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log(P(x,\theta))\right) = I(\theta)$. ✓

Veja detalhes no modulo 9.

— o —

①' ① é válido pois $I(\hat{\theta}_n)$ é estimação consistente de $I(\theta_0)$ outras estimações consistentes são a) $-\frac{1}{n} D^2 l_n(\hat{\theta}_n)$ ou b) $-\frac{1}{n} D^2 l_n(\theta_0)$ onde $l_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \log(P(x_i, \cdot))$.

a) pode ser mais simples.

$$\sqrt{n}\, \mathcal{Z}_n(\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, I(\theta_0)) \quad ; \mathcal{Z}_n = \frac{1}{n} D\ell_n(\theta_0)$$

pelo corolário 3.6.2 sob a hipótese $H_0: \theta = \theta_0$.

e quando $n \to \infty$,

$$n\, \mathcal{Z}_n^T(\theta_0) \cdot I^{-1}(\theta_0)\, \mathcal{Z}_n(\theta_0) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2_r \quad ; \quad \theta_0 \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$$

A estatístico

$$\underbrace{R_n(\theta_0) \doteq n\, \mathcal{Z}_n^T(\theta_0)\, I^{-1}(\theta_0)\, \mathcal{Z}_n(\theta_0)}$$

é a estatístico de Rao. (ou Score de Rao).

$$\underbrace{\text{Logo, } H_0 \text{ é rejeitado se } R_n(\theta_0) \geq \chi^2_{r;1-\alpha}}_{\text{Rão score test}}$$

<u>Exercícios</u> Teoremas 6.3.4 e 6.3.5 aplicação no modelo Normal.