<u>Notas</u> Teorema (já visto) 5.3.5 $\hat{\eta} = \eta + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ddot{A}^{-1}(\eta)\cdot[T(x_i) - \dot{A}(\eta)] + o_\eta(n^{-1/2})$

e $\sqrt{n}(\hat{\eta}-\eta) \to N_d(0, \ddot{A}^{-1}(\eta))$

- lembrando que sob a forma canonica $\ddot{A}(\eta) = Var_\eta(T) = I(\eta)$ onde $I(\eta)$ é a informação de Fisher.
- a variancia assintotica de $\sqrt{n}(\hat{\eta}-\eta)$ e $\ddot{A}^{-1}(\eta) = I^{-1}(\eta)$

<u>Exemplo</u> $x_1, \dots x_n$ iid ; $x \sim N(\mu, \sigma^2)$;

usando a forma canonica $I(\eta) = \ddot{A}(\eta)$

$$= \frac{1}{2\eta_2^2}\begin{pmatrix} -\eta_2 & \eta_1 \\ \eta_1 & 1-\eta_1^2(4\eta_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

$\eta_1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\eta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$

Sendo $\hat{\eta}_1 \overset{EMV}{=} \frac{\bar{x}}{\hat{\sigma}^2}$; $\hat{\eta}_2 = -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}$ onde $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - [\bar{x}]^2$

Pelo resultado citado acima $\sqrt{n}(\hat{\eta}_1 - \eta_1, \hat{\eta}_2 - \eta_2) \to N_2(0, I^{-1}(\eta))$

usando o metodo Delta podemos retomar os parametros μ, σ^2

$$\sqrt{n}(\bar{x}-\mu, \hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} N_2(0, \Sigma_0)$$

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 2\sigma^4 \end{pmatrix}$$

Retomando a noção de contraste mínimo (modelo 5) o problema de estimação pode ser pensado em termos de ρ que irá permitir definir um sistema de equações. Formalmente, se $X_1, X_2 \dots X_n$ são iid. P_θ, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. $P_\theta \in \mathcal{P}$ regular, $\rho : \mathcal{X} \times \Theta \to \mathbb{R}$. ; $D(\theta, \theta_0) = E_{\theta_0}\left(\rho(X_1,\theta) - \rho(X_1,\theta_0)\right)$

logo, para identificar θ_0 é identificado $\underbrace{\tilde{\theta}_n = \arg\min \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho(X_i,\theta)}_{(*)}$

e $\tilde{\theta}_n$ é a estimatriz de mínimo contraste

- Exemplo (modelo 6) $l_{\underline{x}}(\theta) = \ln(p(\underline{x}/\theta)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} p(x_i/\theta)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln(p(x_i/\theta)).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} l_{x_i}(\theta)$$

$\rho(x,\theta) = -l_x(\theta)$

$\hookrightarrow$ $\tilde{\theta}_n$ é o EMV ✓.

Condições em ρ

A_0: $\psi = \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$ é bem definido. Nesse caso $(*)$ é dado por $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \psi(X_i, \tilde{\theta}_n) = 0$. (5.4.20)

A_1: condição em termos da distribuição de X e a sua relação com o verdadeiro valor de θ

$\theta(P)$ é solução $\int \psi(x,\theta)\,dP(x) = 0$. e $\int |\psi(x,\theta)|\,dP(x) < \infty$ $\theta \in \Theta$, $P \in \mathcal{P}$.

e $\theta(P_\theta) = \theta$ é a unica sol ✓

A_2: $E_P\left(\psi^2(X_1, \theta(P))\right) < \infty \ \forall P \in \mathcal{P}$

A_3: $\psi(\cdot,\theta)$ é tal que $E_P\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(X_1, \theta(P))\right) \neq 0$

A_4 : $\sup_t \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(X_i, t) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(X_i, \theta(P)) \right) \right| : |t - \theta(P)| \leq \varepsilon_n \right\}$

$\xrightarrow{P} 0$ se $\varepsilon_n \to 0$

A_5 : $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta(P)$. (ie $\tilde{\theta}_n$ é consistente na família $\mathcal{P}$).

O Teorema 5.4.2 mostra que sob as condições $A_0 - A_5$

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\theta}_n - \theta(P)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} N(0, \sigma^2(\psi, P)) \text{ onde}$$

$$\sigma^2(\psi, P) = E_P\left[\psi^2(X_1, \theta(P))\right] \Big/ \left\{ E_P\left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(X_1, \theta(P))\right] \right\}^2$$

<u>Exemplo</u>. $\rho(x, \theta) = \log(p(x/\theta)) = l(x; \theta) \Rightarrow \psi(x, \theta) = \frac{\partial l}{\partial \theta}(x; \theta)$

(Teorema 5.4.3)

$$I(\theta) \underset{b}{=} -E_\theta\left\{\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}(X_1, \theta)\right\} = Var_\theta\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}(X_1, \theta)\right) \underset{a}{=} E_\theta\left(\frac{\partial l^2}{\partial \theta}(X_1, \theta)\right)$$

$$E_P\left[\psi^2(X_1, \theta(P))\right] = E_\theta\left[\frac{\partial l^2}{\partial \theta}(X_1, \theta)\right] \overset{a}{=} I(\theta).$$

$$\left\{E_P\left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(X_1, \theta(P))\right]\right\}^2 = \left\{E_\theta\left[\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}(X_1, \theta)\right]\right\}^2 \underset{b}{=} I(\theta)^2$$

$\Rightarrow \sigma^2(\psi, P) = \frac{1}{I(\theta)}$. e temos $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$

<u>Exemplo</u> $X_1, \dots X_n$ iid $N(\theta, 1)$; $\bar{X} \sim N(\theta, \frac{1}{n})$.

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \theta}{1/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad \text{ie} \quad \frac{Z}{\sqrt{n}} = \bar{X} - \theta \quad ; \quad \frac{Z}{\sqrt{n}} + \theta = \bar{X}$$

$$\{|\bar{X}| \leq n^{-1/4}\} = \left\{\left|\frac{Z}{\sqrt{n}} + \theta\right| \leq n^{-1/4}\right\} = \{|Z + \theta\sqrt{n}| \leq \underbrace{n^{-1/4} \cdot n^{1/2}}_{n^{\frac{2}{4} - \frac{1}{4}}}\}$$

$$= \{|Z + \theta\sqrt{n}| \leq n^{1/4}\}$$

$$\text{Prob}\{|\bar{X}| \leq n^{-1/4}\} = \text{Prob}\{|Z + \theta\sqrt{n}| \leq n^{1/4}\} =$$

$$= \Phi(n^{1/4} - \sqrt{n}\theta) - \Phi(-n^{1/4} - \sqrt{n}\theta)$$

$$= \begin{cases} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 & (\text{se } \theta \neq 0) \\ \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 & (\text{se } \theta = 0) \end{cases} \qquad (\text{exercício})$$

Considere $\tilde{\theta}_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |\bar{X}| \leq n^{-1/4} \\ \bar{X} & \text{se } |\bar{X}| > n^{-1/4} \end{cases}$ onde $\tilde{\theta}_n$ compete com $\bar{X}$

Então $P_\theta(\tilde{\theta}_n = \bar{X}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ se $\theta \neq 0$ & $P_\theta(\tilde{\theta}_n \equiv 0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ se $\theta = 0$

Assim se $\theta \neq 0$ $\quad \sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta) \to N(0, \sigma^2(\theta))$

onde $\sigma^2(\theta) = 1 = I(\theta)$

e se $\theta = 0$ $\quad \sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - 0) \to N(0, \sigma^2(0))$

neste caso $\sigma^2(0) = 0$