Prioris Conjugados

- **Def**: uma família $\mathcal{F}$ de distribuições de probabilidade em Θ é dita conjugada (ou fechada em relação à verossimilhança) se $\forall \pi \in \mathcal{F}$, a posteriori $\pi(\theta/x) \in \mathcal{F}$.

Exemplo: considere $X|_\theta \sim Bin(n,\theta)$; $\mathcal{F}$ = distribuição Beta : $\mathcal{F}$ é conjugada
$(Beta(\alpha,\beta))$

dem: seja $\pi(\theta) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \Rightarrow \pi(\theta/x) \propto \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \cdot \theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$

ie $\pi(\theta/x) \propto \theta^{\alpha+x-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}$ ie $\pi(\theta/x)$ é Beta $(\alpha+x, n-x+\beta)$

Def (Família Exponencial e Família Natural)

Seja Θ o espaço parametrico. $\mathcal{X}$ o espaço amostral; C, h, R e T aplicações $C: \Theta \to \mathbb{R}_+$; $h: \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$; $R: \Theta \to \mathbb{R}^k$; $T: \mathcal{X} \to \mathbb{R}^k$.

tais que
$$f(x/\theta) = C(\theta)h(x)\exp\{R(\theta)T(x)\}$$
$(\ldots)$ $(\equiv)$

ou
$$= h(x)\exp\{R(\theta)T(x) - B(\theta)\}$$
$C(\theta) = \exp(-B(\theta))$

logo, f é dita família exponencial de dimensão k.

Em particular, se $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ e $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^k$. e
$$f(x/\theta) = C(\theta)h(x)\exp(\theta x),$$

f é dita exponencial natural.

ou notação $f(x/\theta) = h(x)\exp\{\theta x - \psi(\theta)\}$
$$e^{-\psi(\theta)} = C(\theta)$$

Nota: pode ser $h(x)\exp\{\theta \cdot T(x) - \psi(\theta)\}$
o importante é parametro x função de x.

<u>Exemplo</u>. Considere S um simplex em $\mathbb{R}^k$

$$S = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) : \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1 \ , \ \omega_i > 0 \right\}$$

a distribuição Dirichlet em S ; $D_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

é definida por $\quad f(p/\alpha) = \dfrac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i - 1} I_S(p)$

onde $p = (p_1, \dots, p_k)$; logo

$$f(p/\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\prod_{i=1}^{k} \Gamma(\alpha_i)} \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - 1) \ln(p_i) \right\} I_S(p)$$

$$= \frac{\Gamma(\sum^{k} \alpha_i)}{\prod^{k} \Gamma(\alpha_i)} \cdot I_S(p) \cdot \exp\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln(p_i) - \sum_{i=1}^{k} \ln(p_i) \right\}$$

$$= c(\alpha) \cdot h(p) \cdot \exp\left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ln(p_i)}_{R(\alpha) \cdot T(p)} \right\}$$

$$(\alpha_1 \dots \alpha_k) \begin{bmatrix} \ln(p_1) \\ \vdots \\ \ln(p_k) \end{bmatrix}$$

= família exponencial

$f(p/\alpha) = f(T(p)/\alpha)$ então $f(T(p)/\alpha)$ é natural p/ $T(p)$.

— o —

Claramente $\forall$ família exponencial natural, da forma

$$f(x/\theta) = c(\theta) h(x) e^{\theta \cdot x}$$

existe a aplicação $\psi(\theta)$ tq $f(x/\theta) = h(x) e^{\theta x - \psi(\theta)}$

$$\left(c(\theta) = \exp\{\ln(c(\theta))\} = \exp\{-[-\ln(c(\theta))]\} \right.$$

$$\left. \text{logo } \psi(\theta) = -\ln(c(\theta)) \right)$$

- Exemplo Se $X/\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow f(x/\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$

$$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = \frac{1}{x!} \exp\{-\lambda + x\ln(\lambda)\} \quad ; \text{ seja } \theta = \ln(\lambda)$$
$$e^{\theta} = \lambda$$

$$= \frac{1}{x!} \exp\{x.\theta - e^{\theta}\} \quad \text{ie } q(\theta) = e^{\theta}$$

ou seja o modelo é natural (exponencial) para $\theta = \ln(\lambda)$

— o —

Priori conjugada :

Exemplo (Exercício prove q') $X/\theta \sim N(\theta, \theta^2)$ e $\pi(\theta)$ $(= IN(\alpha, \mu, \tau))$

dist. normal Invertida generalizada

$$\pi(\theta) \propto |\theta|^{-\alpha} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{1}{\theta} - \mu\right)^2}{2\tau^2}\right\}$$

Como $X/\theta \sim N(\theta, \theta^2)$ então

$$f(x/\theta) \propto \frac{1}{|\theta|} \exp\left\{\frac{x}{\theta} - \frac{x^2}{2\theta^2}\right\}$$

$$\left(f(x/\theta) \propto \frac{1}{|\theta|} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\theta)^2}{\theta^2}\right\} = \frac{1}{|\theta|} \exp\left\{-\frac{(x^2 - 2x\theta + \theta^2)}{2\theta^2}\right\} = \frac{1}{|\theta|} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2} + \frac{x}{\theta} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

logo, $f(x/\theta) \cdot \pi(\theta) \propto |\theta|^{-1-\alpha} \cdot \exp\left\{\frac{x}{\theta} - \frac{x^2}{2\theta^2} - \frac{1}{2\tau^2\theta^2} - \frac{\mu^2}{2\tau^2} + \frac{2\mu}{2\theta\tau^2}\right\}$

Distribuições conjugadas para a família Exponencial

Proposição Seja $f(x|\theta) = h(x)e^{\theta x - q(\theta)}$ (família exponencial Formato Natural)

A família conjugada para $f(x|\theta)$ é dada por

$$\pi(\theta/\mu,\lambda) = k(\mu,\lambda)\, e^{\theta\mu - \lambda q(\theta)} \quad (*)$$

E a posterior (se a priori é dada por $(*)$) é dada por $\pi(\theta/\mu+x, \lambda+1)$

dem

$$h(x)e^{\theta x - q(\theta)} \cdot k(\mu,\lambda)e^{\theta\mu - \lambda q(\theta)} \propto e^{\theta x + \theta\mu - q(\theta) - \lambda q(\theta)}$$

$$= e^{\theta(x+\mu) - (\lambda+1)q(\theta)}$$

ie $\pi(\theta/x)$ é do formo $(*)$

usando $\underset{\text{novo}}{\mu} = x+\mu$ e $\underset{\text{novo}}{\lambda} = \lambda+1$.

$\#$

Exemplo:

$X|\theta \sim Bin(n,\theta)$ ie $f(x|\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$

$$= \binom{n}{x}(1-\theta)^n\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x$$

parametro natural

$$= \binom{n}{x} e^{x\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) - [-n\ln(1-\theta)]}$$

seja $\lambda = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$

$$= \binom{n}{x} e^{x\lambda - \underbrace{[n\ln(1+e^\lambda)]}_{q(\lambda)}}$$

$e^\lambda = \frac{\theta}{1-\theta}$; $e^\lambda - \theta e^\lambda = \theta$

$e^\lambda = \theta(1+e^\lambda)$

$\boxed{\frac{e^\lambda}{1+e^\lambda} = \theta}$

$1-\theta = 1 - \frac{e^\lambda}{1+e^\lambda}$

$1-\theta = \frac{1}{1+e^\lambda}$

(μ e d fixos)

$$\pi(\theta/\mu,d) \propto e^{\lambda\mu - dq(\lambda)}$$

$$= e^{\mu\cdot\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) - d\cdot[-n\ln(1-\theta)]}$$

$$\text{Beta}(\mu+1; dn-\mu+1) = e^{\ln\left[\frac{\theta}{1-\theta}\right]^\mu} \cdot e^{\ln[(1-\theta)^{dn}]}$$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^\mu \cdot (1-\theta)^{dn} = \theta^\mu(1-\theta)^{dn-\mu} = \theta^{(\mu+1)-1}(1-\theta)^{(dn-\mu+1)-1}$$

eleito da priori Beta$(\mu+1,\ dn-\mu+1)$

usando a priori $\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\mu}(1-\theta)^{dn} \leftarrow \pi(\theta/\mu, dn)$

$$\pi(\theta/x) \propto \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\mu}\cdot(1-\theta)^{dn}\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{x}(1-\theta)^{n}$$

$$\propto \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\mu+x}\cdot(1-\theta)^{(d+1)n} \leftarrow \pi\left(\theta/\mu+x, (d+1)n\right)$$

Ver ver as 29

| Priori → Posterior |

$$\pi(\theta) \propto \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\mu} \cdot (1-\theta)^{\delta n} \quad \text{que é}$$

a dada pela fim exponencial no caso do $Bin(n,\theta)$ e

$$\pi(\theta) \propto \theta^{\mu}(1-\theta)^{\delta n-\mu} = \theta^{\mu+1-1}(1-\theta)^{\delta n-\mu+1-1}$$

ou seja $Beta(\mu+1, \delta n-\mu+1)$

de media $\longrightarrow$ $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \dfrac{\mu+1}{\delta n-\cancel{\mu}+1+\cancel{\mu}+1} = \dfrac{\mu+1}{\delta.n+2}$

de Var $\longrightarrow$ $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \dfrac{(\mu+1).(\delta n-\mu+1)}{(\mu+1+\delta n-\mu+1)^2(\mu+1+\delta n-\mu+1+1)}$

$$= \frac{(\mu+1)(\delta n-\mu+1)}{(\delta n+2)^2(\delta n+3)}.$$

e a posteriori é $\pi(\theta/x) \propto Beta(\tilde{\mu}+1, \tilde{\delta} n-\tilde{\mu}+1)$

onde $\tilde{\mu} = \mu+x$; $\tilde{\delta} = \delta+1$.

laubrée Beta(a,b) key

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \theta^{a-1} \cdot (1-\theta)^{b-1} \quad ; \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$E = \int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \theta^{a+1-1} (1-\theta)^{b-1} d\theta = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cancel{\Gamma(b)}} \frac{\Gamma(a+1)\cancel{\Gamma(b)}}{\Gamma(a+b+1)}$$

$$= \frac{\cancel{\Gamma(a+b)} \cdot a \cdot \cancel{\Gamma(a)}}{\cancel{\Gamma(a)} \cdot (a+b)\cancel{\Gamma(a+b)}} = \frac{a}{a+b} = E$$

$$E(\theta^2) = \int_0^1 \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \theta^{a+2-1} \cdot (1-\theta)^{b-1} d\theta = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cancel{\Gamma(b)}} \cdot \frac{\Gamma(a+2)\cancel{\Gamma(b)}}{\Gamma(a+b+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b) \cdot (a+1)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a) \cdot (a+b+1)\Gamma(a+b+1)} = \frac{(a+1)a\cancel{\Gamma(a)} \cdot \cancel{\Gamma(a+b)}}{(a+b+1)(a+b)\cancel{\Gamma(a)} \cdot \cancel{\Gamma(a+b)}}$$

$$E(\theta^2) = \frac{a \cdot (a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \quad ; V = E(\theta^2) - E^2$$

$$= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$V = \frac{a(a+1)(a+b) - a^2 \cdot (a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)} = \frac{(a^2+a)(a+b) - a^2(a+b) - a^2}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

$$= \frac{\cancel{a^2(a+b)} + a(a+b) - \cancel{a^2(a+b)} - a^2}{(a+b)^2 \cdot (a+b+1)} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = V$$

ver Poisson pag 28.

$x/\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ie

$f(x/\lambda) = \frac{1}{x!} \exp\{x.\theta - e^{\theta}\}$ ie $\theta = \ln(\lambda)$, $\psi(\theta) = e^{\theta}$.

$\pi(\theta) \propto \exp\{x_0.\theta - d e^{\theta}\}$ (*)

$\Rightarrow \pi(\theta/x) \propto \exp\{(x_0+x)\theta - (d+1)e^{\theta}\}$

identifiquemos a forma (*) em termos de λ.

$\pi(\theta) \propto \exp\{x_0.\ln(\lambda) - d.\lambda\} = \lambda^{x_0} . e^{-d\lambda}$ ie

$= \lambda^{(x_0+1)-1} . e^{-d\lambda} \rightsquigarrow \text{Gama}(x_0+1, d)$

ie $\theta/x \sim \text{Gama}(x_0+x+1, d+1)$

Resumo

Famílias exponenciais (ver dist conjugados tb)

→ Aqui o foco é a suficiência

Def Considere a família de distribuições $\mathcal{P} = \{ P_\theta : \theta \in \Theta \}$

se $P_\theta(x) = P(x/\theta) = h(x) \exp\{ \eta(\theta) T(x) - B(\theta) \}$ $(*)$

dizemos que $P_\theta(\cdot)$ pertence à família exponencial para adequadas funções $T, h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$; $\eta, B : \Theta \to \mathbb{R}$.

exemplos: ver aula de conjugados

$\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$; $x = 0, 1, \ldots$; $\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$; $x = 0, 1, \ldots, n$

Nota ① a forma $(*)$ permite induzir a forma da verossimilhança para $x_1 \ldots x_n$ iid $(*)$; o que resulta

$$P(x_1, \ldots, x_n / \theta) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i) \cdot \exp\left\{ \eta(\theta) \sum_{i=1}^{n} T(x_i) - n B(\theta) \right\}$$

Nota ② Pelo teorema da fatorização (aula específica) $\sum_{i=1}^{n} T(x_i)$ é suficiente para θ.

Nota ③ para poder fazer inferência usando a estat suf. é necessário determinar a sua distribuição (veja teo seguinte)

Teorema: se $p(x/\theta) = h(x) \exp\{ \eta(\theta) T(x) - B(\theta) \}$ $\Rightarrow$

$$P(T(X) = t / \theta) = h^*(t) \exp\{ \eta(\theta) \cdot t - B(\theta) \} ; \quad h^*(t) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} : \\ T(x) = t}} h(x)$$

Nota ④ os teoremas sobre as famílias exponenciais são formulados na forma canonica (no parametro) i.e. $h(x) \exp\{ \eta T(x) - A(\eta) \}$

↳ natural na aula de dist conjugadas

Teorema se vale $(*)$ $\Rightarrow$ $q(x/\eta) = h(x) \exp\{ \eta \cdot T(x) - A(\eta) \}$ e → exemplo Poisson

$E(T(X)) = A'(\eta)$; $Var(T(X)) = A''(\eta)$ e $E(e^{sT(X)}) = \exp\{ A(s+\eta) - A(\eta) \}$ ← entrar se zero