Uso sequencial do teorema de Bayes

Questão: Suponha que a informação observacional de θ, digamos "dados" pode ser parcelada em duas partes $\{x_1, x_2\} = x$

→ o que pode ocorrer por se tratar de informação observada em dois tempos diferentes

→ ou de naturezas diferentes ...

Por simplicidade supomos que x é obtido em duas etapas sequenciais, no entanto pode ser $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ou seja a informação chegar em "n" etapas

as posterioris obtidos nas seguintes configurações são idênticas (conjectura) → ao pé da pág.

(A) → Dado $\pi(\cdot)$ priori em θ;

→ ocorrem x_1 e x_2 com verossimilhança $f(x_1, x_2|\theta)$

a posteriori é computado: $\pi(\theta|x_1, x_2)$

(B) → Dado $\pi(\cdot)$ priori em θ

→ ocorre x_1 com verossimilhança $f_1(x_1|\theta)$

→ a posteriori é computado $\pi(\theta|x_1)$

→ ocorre x_2 com verossimilhança $f(x_2|\theta, x_1)$

→ a posteriori $\tilde{\pi}(\theta|x_1, x_2) \propto f(x_2|\theta, x_1) \cdot \pi(\theta|x_1)$

logo $[\tilde{\pi}(\theta|x_1, x_2) \propto \pi(\theta|x_1, x_2)]$ → ver

Observe que para qualquer distribuição

$$f(x_1, x_2|\theta) = f(x_1|\theta) \cdot f(x_2|\theta, x_1)$$

note 1 que o fato de utilizar a mesma notação f não conflita em dizer que $f(x_2|\theta, x_1)$ deva não depender de x_1; ou seja

$f(x_1|\theta)$ e $f(x_2|\theta, x_1)$

são duas funções $\neq$'s.

Vejamos então se A e B provocam idênticas posteriores

De B

$$\tilde{\pi}(\theta|x_1, x_2) \propto \pi(\theta|x_1) \cdot f(x_2|x_1, \theta) \propto$$

$$\propto \pi(\theta) f(x_1|\theta) f(x_2|x_1, \theta)$$

$$= \pi(\theta) f(x_1, x_2|\theta)$$

$$\propto \pi(\theta|x_1, x_2) = A \quad \checkmark$$

note 2 continuando com as colocações de note 1 podemos ter situações nas quais

$$f(x_2|\theta, x_1) = f(x_2|\theta)$$

se x_1 e x_2 são independentes condicionados a θ

d s t q q s s

Exemplo

Suponha x_1 e x_2 condicionalmente independentes dado θ e ambos seguindo $N(\theta, v)$; considere uma priori para θ; $N(m, w)$.

(1) a posteriori após x_1 é $\boxed{N(m_1, w_1)}$

onde $m_1 = \dfrac{w x_1 + v.m}{w+v}$; $w_1 = \dfrac{v.w}{w+v}$

$$N(\theta, v) \times N(m, w) \propto \exp\left(-\frac{(x_1-\theta)^2}{2v}\right) . \exp\left(-\frac{(\theta-m)^2}{2.w}\right)$$

$$= \exp\left\{-\frac{(x_1-\theta)^2}{2v} - \frac{(\theta-m)^2}{2w}\right\};$$

$$\frac{(x_1-\theta)^2}{2v} + \frac{(\theta-m)^2}{2w} = \frac{x_1^2 - 2x_1\theta + \theta^2}{2v} + \frac{\theta^2 - 2\theta m + m^2}{2w} \propto$$

$$-\frac{2x_1.\theta}{2v} + \frac{\theta^2}{2v} + \frac{\theta^2}{2w} - \frac{2\theta.m}{2w} = \frac{1}{2}\left\{-2\left(\frac{x_1}{v} + \frac{m}{w}\right)\theta + \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right)\theta^2\right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right)}{2} . \left\{-2 . \left(\frac{x_1}{v} + \frac{m}{w}\right) . \frac{1}{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right)} . \theta + \theta^2\right\}$$

$$\underset{\text{post}}{\text{variac}} = \frac{1}{\frac{1}{v} + \frac{1}{w}} = \frac{vw}{w+v} \checkmark \quad ; \quad \underset{\text{post}}{\text{media}} = \frac{(x_1 . w + m . v)}{\cancel{v.w}} . \frac{\cancel{vw}}{(w+v)} \checkmark$$

continuando com a ideia; x em

(2) a priori de θ é dado pela posteriori $N(m_1, w_1)$

logo após x_2 a posteriori é $\boxed{N(m_2, w_2)}$

$m_2 = \dfrac{w_1 x_2 + v m_1}{w_1 + v}$; $w_2 = \dfrac{v . w_1}{w_1 + v}$

d s t q q s s

$$m_1 = \frac{w x_1 + v m}{v + w} \quad , \quad w_1 = \frac{v w}{w + v}$$

$$m_2 = \frac{w_1 x_2 + v m_1}{w_1 + v} = \frac{\frac{v w}{w+v} \cdot x_2 + v \cdot \frac{w x_1 + v . m}{w + v}}{\frac{v w}{w+v} + v}$$

$$= \frac{\frac{v . w}{w + v}(x_1 + x_2) + \frac{v^2}{w+v} . m}{\frac{v . w + v w + v^2}{w + v}} = \frac{v . w (x_1 + x_2) + v^2 . m}{v . (2 . w + v)}$$

$$= \frac{w(x_1 + x_2) + v m}{2 w + v} = m_2$$

$$w_2 = \frac{v . w_1}{w_1 + v} = v . \frac{v w}{w + v} \cdot \frac{1}{\frac{v . w}{w+v} + v} = \frac{v . v w}{\cancel{w + v}} \cdot \frac{\cancel{w + v}}{(v . w + v w + v^2)}$$

$$= \frac{v w}{2 w + v} = w_2$$

Este procedimento representa a etapa ③ antes introduzida

Já a etapa ④ seria consequência do seguinte procedimento:

θ tem prior $N(m, w)$

$x_1|\theta \sim N(\theta, v) \sim x_2|\theta \qquad x_1|\theta \perp x_2|\theta$

$$f(x_1, x_2|\theta) \propto \exp\left(-\frac{(x_1 - \theta)^2}{2v}\right) . \exp\left(-\frac{(x_2 - \theta)^2}{2v}\right)$$

$$-\frac{1}{2} \left\{ \frac{(x_1 - \theta)^2}{v} + \frac{(x_2 - \theta)^2}{v} \right\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2 - 2 x_1 \theta + \theta^2}{v} + \frac{x_2^2 - 2 x_2 \theta + \theta^2}{v} \right)$$

ADunicamp

d s t q q s s

$$= \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{v} - \frac{2(x_1+x_2)\theta}{v} + \frac{2\theta^2}{v} \right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\propto \left(\frac{-1}{\cancel{2}}\right) \frac{\cancel{2}}{v} \left\{ -(x_1+x_2)\theta + \theta^2 \right\}$$

ie $f(x_1, x_2/\theta) \propto \exp\left(-\frac{1}{v}\left(-(x_1+x_2)\theta + \theta^2\right)\right)$

$$f(x_1,x_2/\theta) \cdot N(m,w) \propto \exp\left(\frac{-1}{2\frac{v}{2}}\left(-(x_1+x_2)\theta + \theta^2\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2w}(\theta-m)^2\right)$$

dentro da exponencial é $\propto$ a

$$\frac{-1}{2} \cdot \left\{ -\frac{(x_1+x_2)}{v/2} \cdot \theta + \frac{\theta^2}{v/2} + \frac{\theta^2}{w} - \frac{2\theta m}{w} \right\} =$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left\{ -\left[\frac{(x_1+x_2)}{v/2} + 2\frac{m}{w}\right] \cdot \theta + \left(\frac{2}{v} + \frac{1}{w}\right)\theta^2 \right\}$$

$$-\frac{(2w+v)}{2 \cdot vw} \cdot \left\{ -\left[\frac{x_1+x_2}{v/2} + \frac{2m}{w}\right] \frac{vw}{(2w+v)} \cdot \theta + \theta^2 \right\}$$

$\boxed{Var = \frac{vw}{2w+v}}$ ou seja coincide com o caso (B).

$$\text{media} = \left[\frac{(x_1+x_2)}{v} \cdot 2 + \frac{2m}{w}\right] \cdot \frac{v \cdot w}{2w+v} \cdot \frac{1}{2} =$$

$\boxed{\frac{w(x_1+x_2) + v \cdot m}{2w+v}}$ que coincide com o caso (B)