Lista Complementar ME524

não deixe de resolver os exercícios dados na sala de aula

1. Computer Arithmetic / Literatura principal: notas do Robert Gray

1.1. Explique o sistema de representação numérica: ponto fixo. Compare com o "ponto flutuante". Apresente exemplos da falta de unicidade da representação do sistema "ponto flutuante".

1.2. Determine o erro relativo nas operações básicas: xy, $1/y$.

1.3. Determine a serie de Taylor das funções $\exp(x)$ e $\exp(-x)$. Construa um algoritmo no R usando a serie de Taylor de cada função. Verifique a estabilidade dos algoritmos propostos, postule soluções caso algum deles não seja estável.

1.4. Seja $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$, denote por S^* a soma resultante do procedimento:

1. as representações $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são somadas e o resultado é representado em ponto flutuante,
2. o resultado anterior é somado à representação $f(x_3)$ e o resultado desta operação é representado,
3. volte aos passos 1. e 2. até esgotar todos os valores da soma S.

Logo S^* é dada pela equação

$$S^* \cong \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i(\delta_i + \sum_{j=i-1}^{n-1} \epsilon_j)$$

onde δ_i é o erro de representação de x_i e ϵ_i o erro de converter a $i-$essima soma (segundo passos 1. e 2.) a ponto flutuante. Assuma $\epsilon_0 = 0$.

Ajuda: veja notas do Robert Gray, pagina 14.

1.5. Suponha que o propósito continua sendo resolver a soma $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$, denote por S_p^* a soma resultante do procedimento:

1. represente e some valores adjacentes,
2. represente os valores obtidos no item anterior,
3. volte aos passos 1. e 2. até esgotar todos os valores da soma S.

Mostre que $|S_p^* - S| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|(k+1)\epsilon_m$, onde ϵ_m é o ϵ da maquina e $n = 2^k$.

Ajuda: veja notas do Robert Gray, pagina 15.

1.6. Estude as funções do R do arquivo intitulado '"variancia.rtf". Manifeste a estabilidade ou instabilidade dos algoritmos apresentados.

Ajuda: veja notas do Robert Gray, pagina 15.

2. Geração de variáveis aleatórias/ Literaturas principais: notas do Robert Gray e livro Robert e Casella.

2.1. Demonstre que se $a = b \bmod m$ e $c = d \bmod m$, então,

2.1.1. $a + c = b + d \bmod m$,

2.1.2. $ac = bd \bmod m$.

2.2. Prove que $10^n = 1 \bmod 9, \forall n \geq 1$.

2.3. Pesquise:

http://cnx.org/content/m13103/latest/

2.4. Linear congruencial method. Mostre que os valores k_i obtidos da sequência que verifica $k_{i+1} = ak_i \bmod m$, para $i = 1, \cdots, m-1$. Ou seja os valores, $k_1, \cdots k_{m-1}$ representam uma permutação dos inteiros $1, \cdots, m-1$. Sob as seguintes condições: a, m inteiros positivos, $a^{m-1} = 1 \bmod m$, $a^l \neq 1 \bmod m$ $\forall 0 < l \leq m-1$. k_0 inteiro não múltiplo de m.

2.5. Construa um algoritmo no R, seguindo os passos:

1. gere $u_1, \cdots, u_n$ i.i.d. U(0,1) (use "runif")
2. faça $x_i = F^{-1}(u_i), i = 1, \cdots, n$.

Aplique seu algoritmo as acumuladas da exponencial de parâmetro λ, Weibull de parâmetros γ e α e a acumulada da logística de parâmetros μ e σ.

Dica: Não monte 3 algoritmos, monte um único algoritmo para as três acumuladas.

Compare seus resultados com as funções do R: "rexp", "rweibull" e "rlogis", respectivamente.

2.6. Resolva o exercício 2.5 do texto de Robert e Casella.

2.7. Aplique o Teorema de Bayes e determine as posterioris nos seguintes cenários,

- $x|\sigma \sim$ N(0,σ^2), $1/\sigma^2 \sim$ Gama(1,2).
- $x|\lambda \sim$ Poisson(λ), $\lambda \sim$ Gama(2,1).
- $x|p \sim$ BNeg(10,p), $p \sim$ Beta (1/2,1/2).

É possível aplicar o método da inversão para gerar variáveis das distribuições a posteriori determinadas analíticamente?

Sugestão de referência: Christian P. Robert (1994). The Bayesian Choice: A Decision - Theoretic Motivation. Springer-Verlag. New York.

2.8. Postule um algoritmo para a geração de variáveis normais, que não utilize as funções “sin”, “cos”. Implemente seu algoritmo, no R e compare resultados com o tradicional algoritmo de Box and Muller.

Dica: Veja notas de Robert Gray, pagina 241, Robert e Casella, exercícios 2.7, 2.8 e 2.9 (resolva estes exercícios).

2.9. Resolva o exercício 2.6 de Robert e Casella. Mostre a validade das equações 2.3 e 2.4 (do Robert e Casella).

2.10. Reproduzir a aplicação apresentada no Robert e Casella (figura 2.3), pagina 49. Resolver o exercício 2.15, associado ao mesmo assunto.

2.11. Implemente o algoritmo de Aceitação - Rejeição, considerando:

$f(x) \propto \exp(-\frac{x^2}{2})(\sin(6x)^2 + 3\cos(x)^2\sin(4x)^2 + 1)$, $g(x) = 5\exp(-\frac{x^2}{2})$. Postule varios valores de M, e veja o efeito das escolhas na simulação. Grafique as duas funções e os pontos simulados. Compare seu gráfico com o exposto na figura 2.4, pagina 50 do Robert e Casella.

2.12. Resolva os exercícios 2.29 e 2.30 do Robert e Casella.

2.13. Resolva o exercício 2.28 do Robert e Casella.

2.14. Resolva o exercício 2.34 do Robert e Casella.

2.15. Na geração de variáveis N(0,1), compare o desempenho dos seguintes algoritmos,

1. Box - Muller (veja livro do Robert e Casella)

2. Algoritmo sem usar "sin, cos, etc" (veja notas de Robert Gray, página 241)

3. Exemplo 2.18 (usando exponenciais duplas) (veja livro do Robert e Casella)

2.16. Mostre que a quantidade M, dada no exemplo 2.19 do livro do Robert e Casella é máxima se $b = \frac{a}{\alpha}$. Resolva o exercício 2.31 do mesmo livro.

2.17. Considere que seu interesse é simular valores da distribuição

$$f(x) = \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{I}_{x \geq \underline{\mu}}, \quad \text{onde } \underline{\mu} \geq \mu \tag{0.1}$$

a situação exposta no exemplo 2.20 do livro do Robert e Casella e mostre,

1. Simule valores de uma $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e fique com os que verificam a condição $x \geq \underline{\mu}$ e mostre que $P(\text{Aceitação}) = \Phi\left\{\frac{(\mu-\underline{\mu})}{\sigma}\right\}$. Interprete o significado deste fato na prática.

2. Assuma $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, usando a distribuição intrumental, dada pela densidade $g_\alpha(x) = \alpha \exp(-\alpha(x-\underline{\mu}))\mathbb{I}_{x \geq \underline{\mu}}$. Verifique que
$$\frac{f(x)}{g_\alpha(x)} \leq \begin{cases} M_1(\alpha) & \text{se} \quad \alpha > \underline{\mu} \\ M_2(\alpha) & \text{se} \quad \alpha \leq \underline{\mu} \end{cases}$$
onde $M_1(\alpha) = \frac{\exp(\alpha^2/2 - \alpha\underline{\mu})}{\alpha}$ é minimizada em $\alpha^* = \underline{\mu} + \frac{1}{2}\sqrt{\underline{\mu}^2 + 4}$. E $M_2(\alpha) = \frac{\exp(-\underline{\mu}^2/2)}{\alpha}$ é minimizada em $\alpha^{**} = \underline{\mu}$.

2.18. Envelope de aceitação e rejeição.

1. Implemente no R o algoritmo A.5 (página 54: Robert e Casella) para gerar valores da distribuição N(0,1). Utilize para isso, uma função g_l dada pela aproximação em Series de Taylor da função $f(x) = \exp(-x^2/2)$, assuma g_m como exponencial dupla e M como sugerido no exercício 2.15. (item 3).

2. Compare o desempenho deste algoritmo com os do exercício 2.15.

2.19. Densidades log-côncavas.

1. Mostre que $\mathrm{N}(\theta,1)$ é log-côncava,

2. Resolva o exercício 2.40 do Robert e Casella.

2.20. Implemente o algoritmo ARS (A.7 página 57 do Robert e Casella) para o caso da N(θ,1) e para a distribuição de Gumbel, citada no exercício 2.40 do Robert e Casella.

0.1 Aplicando Métodos de Simulação

3.1. Seja $E_f(h(X)) = \int_X h(x)f(x)dx$. Mostre que o estimador de $E_f(h(X))$, definido como $\overline{h}_m = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} h(x_j)$ é um estimador não viesado de $E_f(h(X))$. Mais ainda, mostre que $\overline{h}_m$ converge $a.s.$ (almost surely) para $E_f(h(X))$, quando $m \to \infty$.

3.2. Integração por Monte Carlo. Introdução.

3.2.1. Defina $h(x) = (cos(50x) + sin(20x))^2$. Calcule $\int_0^1 h(x)dx$ e compare o resultado exato com o fornecido pelo algoritmo de Monte Carlo.

Dica: exemplo 3.4, pagina 84 Texto: Robert e Casella. arquivo "montecarlo.txt", na pagina da disciplina.

3.2.2. Controlando precisão: Combine o algoritmo de Box-Muller e o método de integração por Monte Carlo, para reproduzir a tabela 3.1 do Robert e Casella (pagina 85).

3.3. Amostragem por Importância. Introdução.

3.3.1. Diminuição da variância de um estimador: Complete os detalhes do exemplo 3.8 do texto de Robert e Casella, pagina 90.

3.3.2. Estimação de probabilidades pequenas: Resolva o problema 3.16 e implemente o exemplo 3.11 do Robert e Casella.

3.4. Seja $g(\theta)$ uma função proporcional à distribuição normal de parâmetros μ e σ^2. Considere que é de interesse estimar

$$I = \int g(\theta)d\theta.$$

Utilize o Método de Monte Carlo, para obter esta integral. Para implementar o procedimento, utilize uma amostra gerada desde uma normal de parâmetros μ_1 e σ_1^2. Analise os resultados em função da relação entre σ^2 e σ_1^2.

Demonstre que a variância do estimador de Monte Carlo $\hat{I}$ é infinita se $\sigma_1^2 \leq \frac{\sigma^2}{2}$.

3.5. Seja $g(\underline{\theta})$ uma função proporcional à distribuição normal $p-$dimensional, $N_p(m, V)$. Considere que é de interesse estimar

$$I = \int g(\underline{\theta}) d\underline{\theta}.$$

Utilize o Método de Monte Carlo, para obter esta integral. Para implementar o procedimento, utilize uma amostra gerada desde uma normal $N_p(m, kV)$. Analise os resultados em função de k.

Demonstre que a variância do estimador de Monte Carlo $\hat{I}$ é dada pela forma

$$n^{-1}\left\{\left(\frac{k^2}{2k-1}\right)^{p/2} - 1\right\},$$

onde n representa o tamanho amostral utilizado. Demonstre que esta variância é infinita se $k \leq 1/2$.

3.6 Seja $g(\theta)$ uma função proporcional à distribuição normal de parâmetros μ e σ^2. Considere que é de interesse estimar

$$I = \int g(\theta) d\theta.$$

Utilize o Método de Monte Carlo, para obter esta integral. Para implementar o procedimento, utilize uma amostra gerada desde uma t-student. Analise o resultado $\hat{I}$ em relação ao verdadeiro valor de I e em relação a variância de $\hat{I}$.

3.7. (**mandar por e-mail 27/05/2008**)Considere X com distribuição t -student(ν, θ, σ^2), $f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sigma\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)}\left\{1 + \frac{(x-\theta)^2}{\nu\sigma^2}\right\}^{-\frac{(\nu+1)}{2}}$.

3.7.1. Considere a aplicação $h_1(x) = \sqrt{|\frac{x}{1-x}|}$. Grafique a função h_1.

3.7.2. Suponha que o interesse é estimar $E_f(h_1(X))$, e assuma $\theta = 0$ e $\sigma = 1$.

3.7.2.1. Estime $E_f(h_1(X))$ por Monte Carlo.

3.7.2.2. Estime $E_f(h_1(X))$ usando amostragem por importância com duas alternativas como função g : a) g como sendo uma $N(0, \frac{\nu}{\nu-2})$, b) g como sendo uma $C(0,1)$.

Monitore a convergência (se existir) do estimador (qual critério poderia ser usado para isso?).

3.7.2.3. Estime $E_f(h_1(X))$ por amostragem por importância, considerando a distribuição auxiliar sobre X. (Gama Dupla)

a)Assuma g como sendo a Gama Dupla $(\alpha, 1)$ se

$g(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}|x-1|^{\alpha-1}\exp(-|x-1|)$. Mostre que se $X \sim g$ então $|X-1| \sim$ Gama $(\alpha, 1)$.

b) Monitore a convergência, neste caso.

3.7.3. Considere as aplicações $h_2(x) = x^5 \mathbb{I}_{[2.1,\infty]}(\mathrm{x})$ e $h_3(x) = \frac{x^5}{1+(x-3)^2}\mathbb{I}_{\mathrm{x}\geq 0}$. Suponha que o interesse é estimar $E_f(h_i(X))$, $i = 2, 3$ e assuma $\theta = 0$ e $\sigma = 1$. Aplique as ideias dos itens anteriores.

Dica: Exemplo 3.13 do texto de Robert e Casella.

3.8. (**mandar por e-mail 27/05/2008**) Aplique os estimadores apresentados na pagina 104 do Robert e Casella, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ δ_6 em simulação de Gamas, para determinar os valores esperados das seguintes transformações: $h_1(x) = x^3$, $h_2(x) = x\log(x)$, $h_3(x) = \frac{x}{1+x}$.

Dica: veja pagina 106 do Robert e Casella (exemplo 3.15).

3.9. Aproximação de Laplace.

3.9.1. Enuncie e demonstre o teorema da aproximação de funções por series de Taylor.

3.9.2. Determine os polinômios de Taylor, nos seguintes casos;

3.9.2.1. e^{e^x}, grau=0, $x_0 = 0$.

3.9.2.2. $e^{sin(x)}$, grau=3, $x_0 = 0$.

3.9.2.3. $\sin(x)$, grau=$2n$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3.9.2.4. $\log(x)$, grau=n, $x_0 = 2$.

3.9.2.5. $\exp(x)$, grau= n, $x_0 = 1$.

3.9.2.6. $\cos(x)$, grau=$2n$, $x_0 = \pi$.

3.9.2.7. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, grau=$2n+1$, $x_0 = 0$.

3.9.3. Determine $\int_a^b \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(\frac{-x}{\beta})dx$, usando aproximação de Laplace, nos seguintes intervalos (a,b): a) $(7,9)$, b) $(6,10)$, c) $(2,14)$, d) $(15.987,\infty)$. Assuma $\alpha=5, \beta=2$.

0.2 MCMC

4.1. Descreva e implemente o algoritmo de Gibbs Sampling para gerar valores da seguinte distribuição. $f(\underline{\theta}) = \begin{cases} c & \text{se} \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1 \\ 1-c & \text{se} \quad 2 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 3 \\ 0 & \text{se} \quad \text{cc} \end{cases}$

Onde c é uma constante e $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$.

Dica: determine as condicionais da função f.

Responda se observou convergência.

4.2. Descreva e implemente o algoritmo de Gibbs Sampling, para gerar valores (μ, σ^2) considerando a seguinte função:

$$g(\mu,\sigma^2) = (\sigma^2)^{-t}\exp\left\{-\frac{(\mu-m_1)^2}{2v} - \frac{(b+d(\mu-m_2)^2))}{2\sigma^2}\right\}$$

onde t, m_1, b, d, m_2 são valores constantes.

Verifique se houve convergência.

4.3. Assuma o modelo de efeitos aleatórios

$$Y_{ij} = \theta_i + e_{ij},\ i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,J$$

Sendo θ_i independentes e identicamente distribuídas $N(\mu,\sigma^2_\theta)$ e e_{ij} independentes e ienticamente distribuídas $N(0,\sigma^2_e)$.

4.3.1. Procure na literatura situações que tenham sido modeladas por este modelo. Assumindo que μ, σ^2_θ e σ^2_e são fixos. Apresente as estimativas pontuais por máxima verossimilhança dos valores de μ, σ^2_θ e σ^2_e, respectivamente.

4.3.2. Assuma que as quantidades μ, σ^2_θ e σ^2_e são aleatórias e independentes e atribua a elas as siguintes distribuições a priori:

$$\mu \sim N(\mu_0,\sigma^2_0),\ \frac{1}{\sigma^2_e} \sim Gama(a_1,b_1),\ ,\ \frac{1}{\sigma^2_\theta} \sim Gama(a_2,b_2),$$

onde $\mu_0, \sigma_0^2, a_1, b_1, a_2$ e b_2 representam valores constantes e fixos.

4.3.2.1. Mostre que uma vez obtida a amostra de valores Y_{ij} as distribuições condicionais são dadas pela seguinte lista

$$\theta|(\sigma_e^2, \sigma_\theta^2, \mu) \sim N\left(\frac{J\overline{Y_i}\sigma_\theta^2 + \mu\sigma_e^2}{J\sigma_\theta^2 + \sigma_e^2}, \frac{\sigma_\theta^2\sigma_e^2}{J\sigma_\theta^2 + \sigma_e^2}\right)$$

$$\mu|\theta, \sigma_\theta^2) \sim N\left(\frac{n\overline{\theta}\sigma_0^2 + \mu_0\sigma_\theta^2}{n\sigma_0^2 + \sigma_\theta^2}, \frac{\sigma_0^2\sigma_\theta^2}{n\sigma_0^2 + \sigma_\theta^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sigma_\theta^2}|(\mu, \theta) \sim Gama(n/2 + a_2, b_2 + \sum_i(\theta_i - \mu)^2/2)$$

$$\frac{1}{\sigma_e^2}|\theta \sim Gama(nJ/2 + a_1, b_1 + \sum_{i,j}(Y_{ij} - \theta_i)^2/2)$$

onde $\overline{Y_i} = \sum_j Y_{ij}/J$ e $\overline{\theta} = \sum_i \theta_i/n$, $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)'$.

4.3.2.1. Implemente Gibbs Sampling e controle a convergência.

Dica: pagina 288, notas Robert Gray.

4.4. Seja $x = (x_1, \cdots, x_n)$ uma amostra aleatoria desde $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, onde μ e σ^2 são desconhecidos. Considere $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

4.4.1. Demonstre que $f(x|\theta) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(s^2 + n(\overline{x} - \mu)^2)\right\}$ onde $s^2 = \sum_{i=1}^n(x_i - \overline{x})$.

4.4.2. Demonstre que se considera uma densidade a priori

$f(\theta) = k(a, b, w)(\sigma^2)^{-(b+3)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(a + (\mu - m)^2/w)\right\}$ onde

$k(a, b, w) = a^{b/2}2^{-(b+1)/2}(\pi w)^{-1/2}\left\{\Gamma(\frac{1}{2}b)\right\}^{-1}$ é uma constante, assim como a, b e w.

Então a distribuição a posteriori, resulta:

$f(\theta|x) = k(a_1, b_1, w_1)(\sigma^2)^{-(b_1+3)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(a_1 + (\mu - m_1)^2/w_1)\right\}$, onde

$w_1 = \frac{w}{1+nw}$, $m_1 = \frac{m+nw\overline{x}}{1+nw}$, $b_1 = b + n, a_1 = a + s^2 + \frac{n(\overline{x}-m)^2}{1+nw}$.

4.4.3. Demonstre que $f(\mu|x) = k_\mu(t_1, b_1)\left\{1 + (\mu - m_1)^2/(b_1t_1)\right\}^{-(b_1+1)/2}$ onde

$t_1 = w_1a_1/b_1$ e $k_\mu(t_1, b_1) = (t_1b_1)^{-1/2}\left\{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}b_1)\right\}^{-1}$.

Ou seja $(\mu - m_1)/\sqrt{t_1} \sim$ t-Student (b_1 graus de liberdade).

Dica: Considere a substituição $y = \frac{1}{2\sigma^2}(a_1 + (\mu - m_1)^2/w_1)$, na forma $f(\theta|x)$ em 4.4.2.

4.4.4. Demonstre que $f(\sigma^2|x) = k_{\sigma^2}(a_1, b_1)(\sigma^2)^{-(b_1+2)/2} \exp(-\frac{a_1}{2\sigma^2})$ onde

$k_{\sigma^2}(a_1, b_1) = (\frac{1}{2}a_1)^{b_1/2} \left\{\Gamma(\frac{1}{2}b_1)\right\}^{-1}$.

Ou seja $a_1/\sigma^2 \sim$ Qui-Quadrado (b_1 graus de liberdade).

4.4.5. Utilize Metropolis Hastings, para inplementar um gerador da distribuição $f(\theta|x)$

4.5. Implemente o algoritmo de Metropolis Hastings, para os modelos desta seção de exercícios. Compare com os amostradores de Gibbs.

0.3 Bootstrap

5.1. Usando o exemplo 10.1 de Robert Gray, pag 300.

5.1.1. Determine os estimadores bootstrap (paramétricos e não paramétricos), fornecidos pelo exemplo), considerando que a amostra $x_1, \cdots, x_n$ vem de uma exponencial, de parâmetro $\lambda = 1, 10, 100$. Considere ainda, tamanhos amostrais $n = 50, 100, 1000$, e verifique o comportamento destes estimadores em função do tamanho amostral.

5.1.2. Reconstrua os estimadores, no caso de assumir, para $x_1, \cdots, x_n$, um modelo normal de media μ e variância igual a 1 (fixa). Implemente, neste caso os estimadores bootstrap, discutidos no exemplo 10.1, para diferentes tamanhos amostrais e diferentes valores de μ.

5.2. Quantas amostras bootstrap são necessárias?.

Considere o item 10.1.2 do texto do Robert Gray, pagina 308. Desenvolva todas as contas que ajudam a determinar o valor adequado de B (numero de amostras bootstrap).

5.3. Considere duas amostras independentes, uma delas $x_1, \cdots, x_n$ desde uma distribuição $N(0, 1)$ e a outra amostra $y_1, \cdots, y_m$ desde uma distribuição $N(5, 1)$. Implemente o teste por bootstrap, sugerido no exemplo 10.4 (Robert Gray, p 312), para testar $H_0 : \theta = 0$, onde $\theta = E(x_i) - E(y_j)$. Trabalhe com diferentes valores de n e m. Faça o teste bootstrap 100 vezes com as suposições do enunciado e conte o numero de rejeições do teste.

5.4. Reproduzir o exercício anterior para amostras independentes de exponenciais $\lambda = 1, \lambda = 10$ respectivamente.

5.5. Considere o teste exposto no exemplo 10.5 do texto do Robert Gray, pagina 315. Desenvolva em profundidade cada conta.

0.4 Algebra Linear

6.1. Algoritmo de decomposição LU, de uma matriz quadrada não singular $A = (a_{i,j})$, detalhado na pagina 27 do texto de Robert Gray.

6.1.1. Demonstre algebricamente que este algoritmo funciona corretamente.

6.1.2. Implemente este algoritmo no R, de forma genérica.

6.1.3. Aplique seu algoritmo à matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

6.1.4. Compare o resultado do seu algoritmo com os resultados do comando "lu" do R (package: Matrix). Dica: use matrizes de dim ≥ 3. Veja o comando "expand".

6.2. Algoritmo de decomposição de Choleski de uma matriz quadrada, simétrica e não singular $A = (a_{i,j})$, pagina 33 do texto de Robert Gray.

6.2.1. Demonstre algebricamente que este algoritmo funciona corretamente.

6.2.2. Implemente este algoritmo no R, de forma genérica.

6.2.3. Demonstre que o numero de operações requeridas por este algoritmo é quase a metade do numero requerido para a decomposição LU.

6.3. Matrizes positivas definidas.

6.3.1. Apresente propriedades relevantes das matrizes positivas definidas.

6.3.2. Como pode ser checarna prática a característica "positiva definida"?

6.3.3. Apresente exemplos de matrizes que são positivas definidas e de outras que não são positivas definidas.

6.4. Mínimos Quadrados.

6.4.1. Demonstre a equivalência entre as equações 2.15 e 2.16, das paginas 45 e 46 do texto do Robert Gray.

6.4.2. Demonstre que derivando a equação 2.16 (para determinar β) obtem-se a equação

$$X^T X \beta = X^T y$$

6.4.3. Justifique a causa pela qual o método de eliminação Gausiana permite determinar o posto de uma matriz. Apresente um exemplo.

6.4.4. Demonstre que se Q é uma matriz ortogonal e X tem posto p é possível achar a matriz R, de forma tal que a equação 2.17 da pagina 47 do texto de Robert Gray, seja valida.

6.4.5. Resolva o exercício 2.2, da pagina 47 do texto de Robert Gray.

6.5. Verifique as propriedades da transformação de Householder, citadas na pagina 44 do texto de Robert Gray.