Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Disciplina Inferência - ME 322
Exercícios Resolvidos sobre Família Exponencial, Estatística Suficiente, Minimal e Ancilar

1ª) Demonstre que as seguintes distribuições pertencem à Família Exeponencial:

a) $X \sim Gama(r, \lambda)$ (analise em função de λ):
Resposta

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \exp\{-\lambda x\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \\ &= \exp\left\{r \log(\lambda) - \log[\Gamma(r)] - \lambda x\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) \\ &= h(x) \exp\left\{\eta(\theta) T(x) - B(\theta)\right\}, \end{aligned}$$

com $h(x) = \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, $\eta(\theta) = -\lambda$, $T(x) = x$, $B(\theta) = \log[\Gamma(r)] - r\log(\lambda)$.

b) $X \sim Beta(a, b)$:
Resposta

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \\ &= \exp\{\log(\Gamma(a+b)) - \log(\Gamma(a)) - \log(\Gamma(b)) + (a-1)\log x + (b-1)\log(1-x)\} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \\ &= h(x) \exp\left\{\sum_{i=1}^{2} \eta_i(\boldsymbol{\theta}) T_i(x) - B(\boldsymbol{\theta})\right\}, \end{aligned}$$

com $h(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$, $\eta_1(\boldsymbol{\theta}) = (a-1)$, $\eta_2(\boldsymbol{\theta}) = (b-1)$, $T_1(x) = \log x$, $T_2(x) = \log(1-x)$, $B(\boldsymbol{\theta}) = \log(\Gamma(a)) + \log(\Gamma(b)) - \log(\Gamma(a+b))$.

2ª) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de

$$f_X(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{I}_{\theta,\infty}(x), \; -\infty < \theta < \infty,$$

ache uma estatística suficiente para θ.

Resposta

A distribuição conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_i) = e^{-(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta)} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) \mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)}),$$

pois $\theta < x_i < \infty \; \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, com $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Então,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} e^{n\theta} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) \mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)}) = g(x_{(1)}, \theta) h(\boldsymbol{x}),$$

com $g(x_{(1)}, \theta) = e^{n\theta} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})$ e $h(\boldsymbol{x}) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})$, ou seja, $g(x_{(1)}, \theta)$ só depende da amostra através da estatística $X_{(1)}$, assim pelo Teorema da Fatoração $X_{(1)}$ é uma estatística suficiente para θ.

3ª) Seja X uma única observação de uma $N(0, \theta)$. ($\theta = \sigma^2$.)

a) X é uma estatística suficiente?
Resposta

Sim, pois a amostra é sempre suficiente para o parâmetro.

b) $|X|$ é uma estatística suficiente?
Resposta
A densidade conjunta da amostra com uma única observação é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x) = g(x^2, \theta) h(x),$$

com $g(x^2,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta}\right\}$ e $h(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$, como $g(x^2,\theta)$ só depende da amostra através de X^2, então pelo Teorema da Fatoração esta é uma estatística suficiente. Fazendo $g(X^2) = \sqrt{X^2} = |X|$, sendo $g(.)$ uma função 1 a 1 de X^2, ou seja, uma função 1 a 1 de uma estatística suficiente, temos que $|X|$ também é uma estatística suficiente para θ.

4ª) Considere X com densidade $f_X(x) = (\theta/2)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}\mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Defina $t(x) = 2\mathbb{I}_{\{1\}}(x)$.

a) X é uma estatística suficiente?
Resposta
Sim, pois a amostra é sempre uma estatística suficiente para o parâmetro.

b) $|X|$ é uma estatística suficiente?
Resposta

A densidade conjunta para uma única amostra é dada por

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= (\theta/2)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}\mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x) = (\theta/2)^{|x|}\frac{(1-\theta)}{(1-\theta)^{|x|}}\mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x) \\
&= \left(\frac{\theta}{2(1-\theta)}\right)^{|x|}(1-\theta)\mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x) = g(|x|,\theta)h(x),
\end{aligned}$$

com $g(|x|,\theta) = \left(\frac{\theta}{2(1-\theta)}\right)^{|x|}(1-\theta)$ e $h(x) = \mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x)$. Como $g(|x|,\theta)$ só depende da amostra através da estatística $|X|$, então pelo Teorema da Fatoração ela é uma estatística suficiente.

c) Qual é o estimador de máxima verossimilhança de θ?
Resposta
A log-verossimilhança da distribuição para uma amostra com única observação é dada por

$$l(\theta) = |x|(\log(\theta) - \log 2) + (1-|x|)\log(1-\theta),$$

calculando o estimador de verossimilhança, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} &= \frac{|x|}{\theta} - \frac{(1-|x|)}{1-\theta}; \\
\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} &= 0 \Rightarrow \frac{|x|}{\hat\theta_{mv}} - \frac{(1-|x|)}{1-\hat\theta_{mv}} = 0 \\
&\Rightarrow \hat\theta_{mv} - \hat\theta_{mv}|x| = |x| - |x|\hat\theta_{mv} \Rightarrow \hat\theta_{mv} = |x|; \\
\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2} &= -\frac{|x|}{\theta^2} - \frac{(1-|x|)}{(1-\theta)^2} < 0,\ \text{para } x \in \{-1,0,1\}.
\end{aligned}$$

Assim a estatística $|X|$ é o EMV para θ.

d) $T = t(x)$ é um estimador não viesado para θ?
Resposta
Como $T = t(x) = 2\mathbb{I}_{\{1\}}(x)$, com

$$\mathbb{I}_{\{1\}}(x) = \begin{cases} 1,\ com\ \mathbb{P}(X=1), \\ 0,\ com\ \mathbb{P}(X \neq 1) \end{cases}$$

assim,

$$\mathbb{E}(T) = 2\mathbb{P}(X=1) = 2\frac{\theta}{2} = \theta.$$

Portanto, T é um estimador não-viesado para θ

e) $f_X(x)$ pertence à Família Exponencial?
Resposta

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \exp\{|x|\log(\theta) + (1-|x|)\log(1-\theta)\}\frac{1}{2^{|x|}}\mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x) \\
&= \exp\left\{|x|\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \log(1-\theta)\right\}\frac{1}{2^{|x|}}\mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x) \\
&= \exp\{\eta(\theta)T(x) - B(\theta)\}h(x),
\end{aligned}$$

com $\eta(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, $T(x) = |x|$, $B(\theta) = -\log(1-\theta)$ e $h(x) = \frac{1}{2^{|x|}}\mathbb{I}_{\{-1,0,1\}}(x)$, além disso, o suporte da distribuição não depende do parâmetro. Portanto $f_X(x)$ pertence a Família Exponencial uniparamétrica.

5ª) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade

$$f_X(x) = \theta x^{-2}\mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x),$$

com $\theta > 0$.

a) Ache o estimador de máxima verossimilhança de θ.
Resposta
A densidade conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{-2}\mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x_i) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-2}\mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x_{(1)})\mathbb{I}_{[x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})$$

pois $\theta < x_i < \infty\ \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, com $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. A verossimilhança fica dada então por

$$L(\theta) \propto \theta^n \mathbb{I}_{(0,x_{(1)}]},$$

pois $0 < \theta \leqslant x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, então $0 < \theta \leqslant x_{(1)}$. $L(\theta)$ é máxima quando $\theta = x_{(1)}$, pois $L(x_{(1)}) > L(\theta)$, $\forall\theta \in (0, x_{(1)}]$. Então, como $X_{(1)}$ maximiza a verossimilhança, $\hat{\theta}_{mv} = X_{(1)}$.

b) A estatística $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$?
Resposta
Os estimadores de máxima verossimilhança sempre dependem da amostra somente através de estitísticas suficientes, ou seja, são funções de estísticas suficientes. Como o estimador de máxima verossimilhança obtido no item b) é a estatística $X_{(1)}$ então esta é suficiente, como consequência.

6ª) Para cada distribuição abaixo seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória. Ache uma estatístisca suficiente minimal para θ.

a) $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\theta)^2/2}\mathbb{I}_{(\mathbb{R})}(x)$, $< -\infty < \theta < \infty$.
Resposta
Fazendo uma razão de densidades conjuntas para as amostras $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ ambas provindas da mesma distribuição, temos que

$$\begin{aligned}\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})} &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x})}{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)^2/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y})} = \frac{e^{-(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\theta\sum_{i=1}^n x_i + n\theta^2)/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x})}{e^{-(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\theta\sum_{i=1}^n y_i + n\theta^2)/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y})} \\ &= \frac{e^{-(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\theta\sum_{i=1}^n x_i)/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x})}{e^{-(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\theta\sum_{i=1}^n y_i)/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y})},\end{aligned}$$

a única forma dessa razão não depender de θ, ou seja, ser constante em relação à θ, é se $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$, pois os termos multiplicados por θ se cancelariam e obteríamos,

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})} = \frac{e^{-(\sum_{i=1}^n x_i^2)/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x})}{e^{-(\sum_{i=1}^n y_i^2)/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y})}.$$

Então, pelo Teorema sobre estatística suficientes e minimais, $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ é uma estatística suficiente e minimal para θ.

b) $f_X(x) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x)$, $-\infty < \theta < \infty$.
Resposta
Da mesma forma que o item anterior, faremos a razão de densidades conjuntas para as amostras $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ ambas provindas da mesma distribuição, então, temos que

$$\begin{aligned}\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})} &= \frac{e^{-\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)}\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_i)}{e^{-\sum_{i=1}^n (y_i-\theta)}\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(y_i)} = \frac{e^{-(n\bar{x}-n\theta)}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})\mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})}{e^{-(n\bar{y}-n\theta)}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(y_{(1)})\mathbb{I}_{(y_{(1)},\infty)}(y_{(n)})} \\ &= \frac{e^{-n\bar{x}}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})\mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})}{e^{n\bar{y}}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(y_{(1)})\mathbb{I}_{(y_{(1)},\infty)}(y_{(n)})},\end{aligned}$$

com $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $Y_{(1)} = min\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ e $Y_{(n)} = max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Para que a razão seja constante em relação à θ, é preciso que $x_{(1)} = y_{(1)}$, pois assim o termo que depende de θ (os indicadores) se cancelariam. Então pelo Teorema, $T(\boldsymbol{X}) = X_{(1)}$ é uma estatística suficiente e minimal para θ.

7ª) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição uniforme no intervalo $(\theta, 2\theta)$, $\theta > 0$. Encontre uma estatística suficiente e minimal para θ.

Resposta
Fazendo uma razão de densidades conjuntas para as amostras $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ ambas provindas da mesma distribuição, temos que

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})} = \frac{\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(\theta,2\theta)}(x_i)}{\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(\theta,2\theta)}(y_i)} = \frac{\mathbb{I}_{(\theta,2\theta)}(x_{(1)})\mathbb{I}_{(x_{(1)},2\theta)}(x_n)}{\mathbb{I}_{(\theta,2\theta)}(y_{(1)})\mathbb{I}_{(y_{(1)},2\theta)}(y_n)}$$

com $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $Y_{(1)} = min\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ e $Y_{(n)} = max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Para que a razão seja constante em relação à θ, é preciso que $x_{(1)} = y_{(1)}$ e $x_{(n)} = y_{(n)}$, pois assim os termos que dependem de θ (os indicadores) se cancelariam. Então pelo Teorema, $T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ é um vetor de estatísticas suficiente e minimal para θ.

8ª) Demonstre que se $X \sim f(x;\theta)$, com $f(.)$ sendo uma densidade, ou seja, X é uma variável contínua, então $Y = F(X;\theta)$ é ancilar para θ, onde $F(.)$ é a distribuição acumulada de X.

Resposta
Vamos iniciar calculando a função de distribuição acumulada de Y, temos que

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(F(X) \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Dado que a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória Z seguindo uma distribuição Uniforme no intervalo $(0,1)$ é da forma

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = z,$$

temos que $Y = F(X) \sim U(0,1)$ e, portanto, sua distribuição não depende de θ implicando que Y é ancilar para θ.

9ª) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição uniforme $U(0,\theta)$. Mostre que a estatística $T(X)$:

$$T(X) = \frac{X_{(1)}}{X_{(n)}},\ X_{(n)} \neq 0,$$

é uma estatística ancilar para θ. ($X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$).

Resposta
Dado que $X_i \overset{iid}{\sim} U(0,\theta)$, temos que $X_i = \theta Y_i$, com $Y_i \overset{iid}{\sim} U(0,1)$, então $X_{(n)} = \theta Y_{(n)}$ e $X_{(1)} = \theta Y_{(1)}$, assim

$$T(X) = \frac{X_{(1)}}{X_{(n)}} = \frac{\theta Y_{(1)}}{\theta Y_{(n)}} = \frac{Y_{(1)}}{Y_{(n)}}.$$

Portanto, $T(X)$ não depende de θ, pois é a razão entre duas variáveis seguindo $U(0,1)$. Desse modo, $T(X)$ é uma estatística ancilar para θ.