Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Disciplina Inferência - ME 322
Exercícios Resolvidos sobre EMV

1ª) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória da densidade

$$f_X(x) = \theta x^{-2} \mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x),$$

com $\theta > 0$. Ache o estimador de máxima verossimilhança de θ.

Resposta
A densidade conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{-2} \mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x_i) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-2} \mathbb{I}_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}) \mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)})$$

pois $\theta \leq x_i < \infty$ $\forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \theta \leq x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, com $X_{(1)} = min\{X_1, \dots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \dots, X_n\}$. Como $x_1, \dots, x_n$ estão variando em um certo intervalo, obrigatoriamente o valor mínimo e máximo dessa amostra estará variando no mesmo intervalo, e, portanto, podemos reescrever o suporte em função dessas duas quantidades, é isso que está resumindo na expressão anterior. A verossimilhança fica dada então por

$$L(\theta) \propto \theta^n \mathbb{I}_{(0,x_{(1)}]}(\theta),$$

pois $0 < \theta \leqslant x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, então $0 < \theta \leqslant x_{(1)}$. $L(\theta)$ é máxima quando $\theta = x_{(1)}$, pois $L(\theta)$ é função crescente de θ, então quanto maior for o valor que θ assumir, maior será o valor da verossimilhança, $L(x_{(1)}) > L(\theta)$, $\forall \theta \in (0, x_{(1)}]$. Então, como $X_{(1)}$ maximiza a verossimilhança, ele é o estimador de verossimilhança de θ, $\hat{\theta}_{mv} = X_{(1)}$.

2ª) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de

$$f_X(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x), \ -\infty < \theta < \infty,$$

ache o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Resposta

A distribuição conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_i) = e^{-(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta)} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) \mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)}),$$

pois $\theta < x_i < \infty$ $\forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, com $X_{(1)} = min\{X_1, \dots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \dots, X_n\}$. Então, a verossimilhança fica dada por

$$L(\theta) \propto e^{n\theta} \mathbb{I}_{(-\infty,x_{(1)})}(\theta),$$

pois $-\infty < \theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, então $-\infty < \theta < x_{(1)}$. $L(\theta)$ é máxima quando $\theta = x_{(1)}$, pois $L(\theta)$ é função crescente de θ, então quanto maior for o valor que θ assumir, maior será o valor da verossimilhança, $L(x_{(1)}) > L(\theta)$, $\forall \theta \in (-\infty, x_{(1)})$. Então, como $X_{(1)}$ maximiza a verossimilhança, ele é o estimador de verossimilhança de θ, $\hat{\theta}_{mv} = X_{(1)}$.

3ª) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de

$$f_X(x) = \frac{2x}{\beta^2 - \alpha^2} \mathbb{I}_{(\alpha,\beta)}(x), \ 0 \leqslant \alpha < \beta < \infty.$$

a) Se α for conhecido, encontre o estimador de máxima verossimilhança de β.
Resposta

A distribuição conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\beta^2 - \alpha^2} \mathbb{I}_{(\alpha,\beta)}(x_i) = \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{(\beta^2 - \alpha^2)^n} \mathbb{I}_{(\alpha,x_{(n)})}(x_{(1)}) \mathbb{I}_{(\alpha,\beta)}(x_{(n)}),$$

pois $\alpha < x_i < \beta \ \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \alpha < x_{(1)} < x_{(n)} < \beta$, com $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Então, a verossimilhança fica dada por

$$L(\beta) \propto (\beta^2 - \alpha^2)^{-n} \mathbb{I}_{(x_{(n)},\infty)}(\beta),$$

pois $0 \leq \alpha < x_{(1)} < x_{(n)} < \beta < \infty$, então $x_{(n)} < \beta < \infty$. $L(\beta)$ é máxima quando $\beta = x_{(n)}$, pois $L(\beta)$ é uma função decrescente em relação à β, então quanto menor for o valor que β assumir, maior será o valor da verossimilhança, ou seja, $L(x_{(n)}) > L(\beta), \ \forall \beta \in (x_{(n)}, \infty)$. Então, como $X_{(n)}$ maximiza a verossimilhança, ele é o estimador de verossimilhança de β, $\hat{\beta}_{mv} = X_{(n)}$.

b) Se β for conhecido, encontre o estimador de máxima verossimilhança de α.

Resposta

A distribuição conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\beta^2 - \alpha^2} \mathbb{I}_{(\alpha,\beta)}(x_i) = \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{(\beta^2 - \alpha^2)^n} \mathbb{I}_{(\alpha,x_{(n)})}(x_{(1)}) \mathbb{I}_{(\alpha,\beta)}(x_{(n)}),$$

pois $\alpha < x_i < \beta \ \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \alpha < x_{(1)} < x_{(n)} < \beta$, com $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Então, a verossimilhança fica dada por

$$L(\alpha) \propto (\beta^2 - \alpha^2)^{-n} \mathbb{I}_{[0,x_{(1)})}(\alpha),$$

pois $0 \leq \alpha < x_{(1)} < x_{(n)} < \beta < \infty$, então $0 \leq \alpha < x_{(1)}$. $L(\alpha)$ é máxima quando $\alpha = x_{(1)}$, pois $L(\alpha)$ é uma função crescente em relação à α, então quanto maior for o valor que α assumir, maior será o valor da verossimilhança, ou seja, $L(x_{(1)}) > L(\alpha), \ \forall \alpha \in [0, x_{(1)})$. Então, como $X_{(1)}$ maximiza a verossimilhança, ele é o estimador de verossimilhança de α, $\hat{\alpha}_{mv} = X_{(1)}$.

4ª) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de

$$f_X(x) = \frac{2x}{\theta} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x), \ 0 < \theta < \infty,$$

ache o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Resposta

A distribuição conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_i) = \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^n} \mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) \mathbb{I}_{(x_{(1)},\infty)}(x_{(n)}),$$

pois $\theta < x_i < \infty \ \forall i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, com $X_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. A verossimilhança fica dada então por

$$L(\theta) \propto \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{(0,x_{(1)})}(\theta),$$

pois $0 < \theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \infty$, então $0 < \theta < x_{(1)}$. $L(\theta)$ é máxima quando $\theta = x_{(1)}$, pois $L(\theta)$ é função crescente de θ, então quanto maior o valor que θ assumir maior o valor da verossimilhança, $L(x_{(1)}) > L(\theta), \ \forall \theta \in (0, x_{(1)})$. Então, como $X_{(1)}$ maximiza a verossimilhança, ele é o estimador de verossimilhança de θ, $\hat{\theta}_{mv} = X_{(1)}$.

5ª) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim U(0, 2\theta)$. Ache o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Resposta

A densidade de X é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2\theta}\mathbb{I}_{(0,2\theta)}(x),\ \theta > 0,$$

então, a distribuição conjunta da amostra é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta}\mathbb{I}_{(0,2\theta)}(x_i) = \frac{1}{(2\theta)^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{I}_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})\mathbb{I}_{(0,2\theta)}(x_{(n)}),$$

pois $0 < x_i < 2\theta\ \forall i = 1,\ldots,n \Leftrightarrow 0 < x_{(1)} < x_{(n)} < 2\theta$, com $X_{(1)} = min\{X_1,\ldots,X_n\}$ e $X_{(n)} = max\{X_1,\ldots,X_n\}$. A verossimilhança fica dada então por

$$L(\theta) \propto \frac{1}{\theta^n}\mathbb{I}_{(x_{(n)}/2,\infty)}(\theta),$$

pois $0 < x_{(1)} < x_{(n)} < 2\theta < \infty$, então $x_{(n)}/2 < \theta < \infty$. $L(\theta)$ é máxima quando $\theta = x_{(n)}/2$, pois $L(\theta)$ é um função decrescente de θ, então quanto menor for o valor que θ assumir, maior será o valor da verossimilhança, $L(x_{(n)}/2) > L(\theta),\ \forall\theta \in (x_{(n)}/2,\infty)$. Então, como $X_{(n)}/2$ maximiza a verossimilhança, ele é o estimador de verossimilhança de θ, $\hat{\theta}_{mv} = X_{(n)}/2$.

6ª) Seja $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim U(-\theta,\theta)$. Ache o estimador de máxima verossimilhança para θ.

Resposta

A distribuição de X é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2\theta}\mathbb{I}_{(-\theta,\theta)}(x),\ \theta > 0,$$

porém, o suporte da distribuição pode ser reescrito que tal forma que

$$f_X(x) = \frac{1}{2\theta}\mathbb{I}_{(-\theta,\theta)}(x) = \frac{1}{2\theta}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(|x|),$$

pois $-\theta < x < \theta \Rightarrow 0 < |x| < \theta$. Dessa forma, a distribuição conjunta da amostra baseada na densidade com o indicador reescrito, é dada por

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta}\mathbb{I}_{(0,\theta)}(|x_i|) = \frac{1}{(2\theta)^n}\mathbb{I}_{(0,y_{(n)})}(y_{(1)})\mathbb{I}_{(0,\theta)}(y_{(n)}),$$

pois $0 < |x_i| < \theta\ \forall i = 1,\ldots,n \Leftrightarrow 0 < y_{(1)} < y_{(n)} < \theta$, com $Y_{(1)} = min\{|X_1|,\ldots,|X_n|\}$ e $Y_{(n)} = max\{|X_1|,\ldots,|X_n|\}$.

OBSERVAÇÃO: Nesse caso, estamos trabalhando de forma similar às questões anteriores, onde toda a amostra $x_1,\ldots,x_n$ variava em um certo intervalo e isso implicava que o valor mínimo e máximo da amostra, portanto, estava contido nesse intervalo. Como, nesse exemplo reescrevemos x como $|x|$ para que ele variasse em um intervalo diferente, trabalhamos agora com $y = |x|$, ou seja, uma "nova"variável e temos que $y_1,\ldots,y_n$ varia em um certo intervalo, então o mínimo e o máximo dessa variável vai variar nesse mesmo intervalo.

A verossimilhança fica dada então por

$$L(\theta) \propto \frac{1}{\theta^n}\mathbb{I}_{(y_{(n)},\infty)}(\theta),$$

pois $0 < y_{(1)} < y_{(n)} < \theta < \infty$, então $y_{(n)} < \theta < \infty$. $L(\theta)$ é máxima quando $\theta = y_{(n)}$, pois $L(\theta)$ é um função decrescente de θ, então quanto menor for o valor que θ assumir, maior será o valor da verossimilhança, $L(y_{(n)}) > L(\theta),\ \forall\theta \in (y_{(n)},\infty)$. Então, como $Y_{(n)}$ maximiza a verossimilhança, ele é o estimador de verossimilhança de θ, $\hat{\theta}_{mv} = Y_{(n)}$.