1 Probabilidade

1.1 Espaço Amostral

1 Uma moeda e um dado são lançados. Dé um espaço amostral do experimento e depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.

2 Defina um espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios.

- i Lançamento de dois dados e uma moeda, anota-se a configuração obtida.
- ii Numa linha de produção conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.
- iii Investigam-se familías com 4 crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.
- iv Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, pergunta-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.
- v Um fichário de 10 nomes contém 3 nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.
- vi Um relógio mecânico pode parar a qualquer momento por falha técnica. Mede-se o ângulo em graus que o ponteiro dos segundos forma com o eixo imaginário orientado do centro ao número 12.
- vii De cada família entrevistada numa pesquisa, anotam-se a classe social a que pertence $\{A, B, C, D\}$ e o estado civil do chefe da família.

1.2 Teoria de conjuntos. Combinatório. Indução

Exercícios 1.5; 1.6; 1.12(a),b),c)); 1.13(a),b),c),d)) localizados nas páginas 23, 24, 25, 26 do Capítulo: Noções Básicas do livro "Probabilidade" de Mario Gneri, Hervé Guiol, Aluísio Pinheiro.

1.3 Seleção de amostras

1 Numa sala com 15 pessoas, quantas amostras (de 15 pessoas) com a condição de que todas elas tenham nacido em días diferentes podem ser formadas?. Assuma que o ano tem 365 días.

2 Consideremos o conjunto $\{a, b, c, d\}$
a)Calcular o número de amostras ordenadas com reposição.
b)Calcular o número de amostras ordenadas sem reposição.

3 Uma moeda é lançada três vezes, registra-se a terna de possíveis resultados dos lançamentos.
a)Quantas amostras podem ser obtidas?
b)Quantas amostras de exactamente duas caras podem ser obtidas?.
c)Quantas amostras com pelo menos uma cara podem ser obtidas?.

4 Dois dados são lançados registrando-se os resultados da face superior.
a)Dé um espaço amostral do experimento e depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.
b)Quantas amostras podem ser obtidas?
c)Quantas amostras que apresentam resultados diferentes nos lançamentos entre um e outro dado podem ser obtidas?.

5 O prefixo telefônico de uma universidade é 452.
a)Quantos números telefônicos de sete dígitos podem-se formar?
b)Quantos números telefônicos de sete dígitos diferentes podem-se formar?

6 Temos num plano 10 pontos não alinhados de a três (não tem três pontos na mesma linha). Quantos triângulos, com vértices em ditos pontos ficam determinados?

2 σ-álgebra. Probabilidade.

1 Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o espaço dos resultados do experimento aleatório consistente em jogar um dado e observar o número da face de cima. Suponha que a única informação disponível é a seguinte:

$$P(\{1, 2, 3\}) = 0.60, \; P(\{4\}) = 0.15, \; P(\{5, 6\}) = 0.25$$

a) Prove que é possível calcular as probabilidades dos seguintes conjuntos:

$$\emptyset, \; \{1, 2, 3\}, \; \{4\}, \; \{5, 6\}, \; \{1, 2, 3, 4\}, \; \{1, 2, 3, 5, 6\}, \; \{4, 5, 6\}, \; \Omega$$

b) Prove que a partir da informação disponível é impossível calcular $P(\{5\})$ e $P(\{6\})$.

c) Prove que a partir da informação disponível é impossível calcular as probabilidades dos conjuntos:

$$\{1\}, \; \{2\}, \; \{3\}, \; \{1, 2\}, \; \{1, 3\}, \; \{2, 3\}$$

d) Utilize os resultados dos itens anteriores para concluir que os únicos conjuntos cuja probabilidade pode ser calculada são os listados no item a) .

2 Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o espaço dos resultados do experimento aleatório consistente em jogar um dado e observar o número da face de cima. Suponha que a única informação disponível é a seguinte:

$$Q(\{1, 2, 3, 4\}) = 0.75 \text{ e } Q(\{4, 5, 6\}) = 0.40$$

a) Prove que Q coincide com P do exercício anterior nos seguintes conjuntos

$$\emptyset, \; \{1, 2, 3\}, \; \{4\}, \; \{5, 6\}, \; \{1, 2, 3, 4\}, \; \{1, 2, 3, 5, 6\}, \; \{4, 5, 6\}, \; \Omega$$

b) Prove que é impossível calcular a Q-probabilidade de qualquer conjunto fora dos listados em a).

c) Conclua que as probabilidades P do exercício anterior e Q são equivalentes. Claramente nos conjuntos:

$$\emptyset,\ \{1,2,3\},\ \{4\},\ \{5,6\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5,6\},\ \{4,5,6\},\ \Omega$$

- Definição: Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é dita uma álgebra se e somente se :

$$(1)\Omega \in \mathcal{A};\ (2) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}; (3)\ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$

Exemplo:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4\}\ \{5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5,6\}, \{4,5,6\}, \Omega\}$$

onde $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

3 Prove que as condições a),b),c) e d) para uma família de subconjutos $\mathcal{A}$ de Ω são equivalentes e também equivalentes à definição de álgebra.

a) $i)\ \Omega \in \mathcal{A};\quad ii)\ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A};$
$iii)\ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

b) $i)\ \Omega \in \mathcal{A};\quad ii)\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A};$
$iii)\ \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$

c) $i)\ \Omega \in \mathcal{A};\quad ii)\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A};$
$iii)\ \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$

d) $i)\ \Omega \in \mathcal{A};\quad ii)\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A};$
$iii)\ \{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$ e $\cap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A};$
$iv)\ A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$

Sugere-se o seguinte esquema da prova:
d)$\Leftrightarrow$ a) $\Leftrightarrow$ definição de álgebra $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c)

- Definição de probabilidade para álgebra:
  Seja Ω um subconjunto não vazío e $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos em Ω. Uma probabilidade em $(\Omega, \mathcal{A})$ é uma função $P(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$i)0 \leq P(A)\, \forall A \in \mathcal{A};\;\; ii)P(\Omega) = 1;$$

$$iii)A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)\; \textit{aditividade}$$

- Definição de σ-álgebra:
  Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é uma σ-álgebra se:

$$(1)\Omega \in \mathcal{A};\;\; (2)A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$(3)\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$

4 Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é uma σ-álgebra se e somente se $\mathcal{A}$ for uma álgebra fechada para uniões e interseções enumeráveis.

5 Nem toda álgebra é uma σ-álgebra. Basta considerar um contraexemplo. Seja $\Omega = \{\text{números naturais}\}$ e $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega |\, \text{finito ou}\, A^c\, \text{finito}\}$. Prove que $\mathcal{A}$ é álgebra mas não σ-álgebra.

- Definição de probabilidade em σ-álgebra:
  Seja Ω um subconjunto não vazío e $\mathcal{A}$ uma σ álgebra de subconjuntos em Ω. Uma probabilidade em $(\Omega, \mathcal{A})$ é uma função $P(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$i)0 \leq P(A)\, \forall A \in \mathcal{A};\;\;\; ii)P(\Omega) = 1;$$

$$iii)\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow P(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)\;\; \sigma\textit{-aditividade}$$

6 Prove que σ-aditividade $\Rightarrow$ aditividade.

- Reservamos a palavra eventos apenas para conjuntos numa σ-álgebra.

7 Prove que se $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ for uma seqüência de eventos então

$$P(A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

Propriedade conhecida pelo nome de σ-*subaditividade*.

8 Uma moeda é lançada três vezes, registra-se a terna de possíveis resultados dos lançamentos.
a) Qual é a probabilidade de obter nos três lançamentos exatamente duas caras?
b)Qual é a probabilidade de obter nos três lançamentos pelo menos uma cara?

9 Dois dados são lançados registrando-se os resultados da face superior.
a)Qual é a probabilidade de obter resultados diferentes nos dois lançamentos?
b)Qual é a probabilidade de obter resultados iguais nos dois lançamentos?

10 O prefixo telefônico de uma universidade é 452. Cada número telefônico possui sete dígitos. Qual é a probabilidade de, escolhido um número ao acaso este apresentar sete dígitos diferentes?

11 Um macaco digita num teclado cada uma das 26 letras de um certo alfabeto, uma única vez e em ordem aleatória. Qual é a probabilidade de que a palavra BORGES apareça em algum lugar da seqüência de letras?

12 Um elevador transporta 5 pessoas e pode parar em qualquer andar (7 no total). Qual é a probabilidade de não ter duas pessoas que queiram descer no mesmo andar?. Assumir que os passageiros agem de forma independente e que cada andar é escolhido com a mesma probabilidade por cada indivíduo.

13 Desde uma classe com 50 alunos (23 homens e 27 mulheres) deseja-se formar um grupo de 3 estudantes para apresentar um seminário.
a)Qual é a probabilidade de que escolhido um grupo de três estudantes ao acaso, este conte com a presencia de pelo menos um homem?
b)Qual é a probabilidade de que escolhido um grupo de três estudantes ao acaso, este tenha exatamente 2 homens no grupo?

14 No jogo de pôker com quatro participantes é comum usar-se 32 cartas. As cartas pertencem a um de quatro naipes, a saber: paus, espadas, ouros e copas. As denominações das cartas são: sete, oito, nove dez, valete, dama, rei e ás. Numa primeira etapa são dadas cinco cartas a cada jogador, Consideremos as cartas dadas nesta primeira etapa a um jogador. Qual é a probabilidade de que ele receba um par de ases (somente dois ases na mão do jogador)?

3 Probabilidade condicional. Independência. Teorema de Bayes

1 Assuma a seguinte distribuição de 300 estudantes, segundo sexo e área de estudo

Sexo	Biologia	Exactas	Humanas
Masculino	52	40	58
Feminino	38	32	80

um estudante é selecionado ao acaso
a)Qual é a probabilidade de que seja de sexo feminino e das humanas?.
b)Qual é a probabilidade de que seja de sexo masculino e não seja das biológicas?.
c)Dado que foi selecionado um estudante da área das humanas, qual é a probabilidade de que seja do sexo feminino?.
d)Dado que foi escolhido um estudante de sexo masculino, qual é a probabilidade de que não seja das biológicas?.

2 Suponha que a probabilidade de viver 70 ou mais anos é 0.6 e que a probabilidade de viver 80 ou mais anos é 0.2. Se uma pessoa faz 70 anos, qual é a probabilidade de que comemore o aniversario número 80?.

3 400 pessoas são classificadas segundo sexo e estado civil, obtendo-se a seguinte tabela:

	Solteiro(S)	Casado(C)	Desquitado(D)	Outros(O)
Feminino(F)	150	40	10	20
Masculino(M)	50	60	40	30

a)Calcule $P(S|F)$, $P(C|F)$, $P(D|F)$ e $P(O|F)$. Verifique que $P(S|F) + P(C|F) + P(D|F) + P(O|F) = 1$.
b)Repita a) substituindo F por M.
c)Calcule $P(F|S)$ e $P(M|S)$ e verifique $P(F|S) + P(M|S) = 1$.
d)Repita c) substituindo S por C, D e O.
e)Apresente formalmente as distribuições de *estado civil*, *estado civil/F*, e *estado civil/M*.
f)Apresente formalmente as distribuições de *sexo*, *sexo/S*, *sexo/C*, *sexo/D*, *sexo/O*.
g)Repita todo o exercício substituindo a tabela acima por uma tabela

equivalente onde constem apenas probabilidades em vez de freqüências absolutas.

4 Suponha que se testam os chips para um circuito integrado e que a probabilidade de que sejam declarados com falhas quando efectivamente as tem é 0.95, sendo que a probabilidade de que sejam declarados em bom estado se efectivamente estão em bom estado é 0.97. Se o 0.5% dos chips apresentam falhas, qual é a probabilidade de que um chip que foi declarado com falhas seja bom?

5 Considere uma urna com 3 bolas brancas e 7 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna uma depois da outra sem repor a primeira delas na urna antes da retirada da segunda.
Assuma a seguinte notação: B_1V_2 representando que foi retirada uma bola branca na primeira retirada e uma bola vermelha na segunda. Calcule as seguintes probabilidades

$$P(B_1B_2),\ P(V_1B_2),\ P(B_1V_2),\ P(V_1V_2).$$

Considere que se faz mais uma extração de bolas da urna, recolocando na urna a segunda bola extraída anteriormente e calcule $P(B_1V_2B_3)$, onde $B_1V_2B_3$ representa que foi extraída branca na primeira, vermelha na sengunda e branca na terceira. Compute ainda,

$$P(B_1B_2B_3),\ P(B_1B_2V_3),\ P(V_1B_2B_3).$$

6 Considere duas urnas, a urna A e a urna B. A urna A contém 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas. A urna B contém 2 bolas vermelhas e 5 bolas brancas. Uma moeda honesta e lançada, se o resultado da moeda for cara, uma bola é extraída da urna A; se a moeda resulta coroa uma bola é extraída da urna B.

a) Qual é a probabilidade de extrair uma bola vermelha?

b) Se uma bola vermelha foi extraída, qual é a probabilidade de que a moeda tenha dado cara no lançamento?

7 Considere duas urnas, a urna A e a urna B. A urna A contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 2 bolas verdes. A urna B contém 2 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 4 bolas verdes. Uma bola é extraída da urna A e colocada na urna B, logo, uma bola é extraída da urna B.

a) Qual é a probabilidade de que uma bola extraída desde a urna B seja vermelha?

b) Se uma bola vermelha é extraída da urna B, qual é a probabilidade de que uma bola vermelha tenha sido extraída da urna A?

8 Uma urna contém duas bolas brancas(B) e tês bolas vermelhas(V). Duas bolas são extraídas ao acaso, uma após a outra, sendo registrada a seqüência das cores. Considere cada uma das perguntas nas seguintes situações:

a) as bolas são extraídas com reposição

b) as bolas são extraídas sem reposição

1)Calcule $P(1a.B|2a.V)$ e $P(1a.V|2a.V)$
2)São os eventos $\{2a.V\}$ e $\{1a.B\}$ independentes?

9 30% dos empregados de uma empresa são mulheres e os restantes homens; 9% das pessoas são mulheres e fumantes, 59% das pessoas são homens e não fumantes. Calcule:
a)P(mulher e fumante)
b)P(homem e fumante)
c)Probabilidade de um homem ser fumante
d)Probabilidade de um homem ser não fumante
e)Probabilidade de um fumante ser homem.

10 Uma empresa monta rádios cujas partes são lançadas por três de suas fabricas, denominadas A_1, A_2 e A_3 respectivamente. Elas produzem $15\%, 35\%$ e 50% do total. As probabilidades de que as fabricas apresentem partes defeituosas são $0.01, 0.05$ e 0.02 respectivamente.
a)Uma peça é selecionada ao acaso desde a produção verificando-se que a peça é defeituosa, qual é a probabilidade de que a peça tenha sido lançada pela fabrica $A_i, i = 1, 2, 3$?.
b)Qual é a probabilidade de que uma peça selecionada ao acaso seja defeituosa?

11 Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. 20% dos fregueses do sexo masculino preferem salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: freguês é homen, M: freguês é mulher,
A: freguês prefere salada, B: freguês prefere carne.
Calcular:

$$P(A|H),\ P(B|M),\ P(M|A).$$

12 Na tabela seguinte, os números que aparecem são probabilidades relacionadas com a ocorrência de $A, B, A \cap B$, etc. Assim
$P(A) = 0.10$, enquanto que $P(A \cap B) = 0.04$. Verifique se A e B são independentes.

	B	B^c	
A	0.04	0.06	0.10
A^c	0.08	0.82	0.90
	0.12	0.88	1.00

13 Reconsidere o problema 11, e usando as idéias do exercício 12 verifique se a escolha do prato depende do sexo do freguês.

14 A, B e C são três eventos no mesmo espaço amostral Ω, tais que
$P(C) = 0.3$, $P(B|C) = 0.4$ e $P(A|B \cap C) = 0.5$. Calcule $P(A \cap B \cap C)$.

15 Sejam A e B eventos de Ω. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:
a)A e B são independentes; b)A^c e B^c são independentes;
c)A e B^c são independentes; d)A^c e B são independentes.

16 Demonstre as seguintes afirmações:
a)Se $P(A) = 0$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
b)Se $P(A) = 1$ e B é um evento qualquer, então A e B são independentes;
c)Os eventos D e D^c são independentes se e somente se $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$;
d)Ache uma condição para que o evento E seja independente dele mesmo.

4 Variáveis Aleatórias Discretas

1 Seja X uma variável aleatória discreta com $P(X = 0) = 0.25$, $P(X = 1) = 0.125$, $P(X = 2) = 0.125$, $P(X = 3) = 0.5$. Graficar a função de probabilidade e a função de distribuição acumulada. Calcular o valor esperado, a moda e a mediana de X. Calcular a variância de X. Determine as seguintes probabilidades:

$$P(0 < X < 1),\ P(X \leq 2),\ P(X > 3),\ P(X > 2.5).$$

2 A seguir apresentamos um estudo sobre o número de filhos de 20 funcionários de uma empresa. Há um funcionário sem filho, 5 com 1 filho, 9 com 2 filhos, 4 com 3 filhos e um com 5 filhos. Calcule a média e variância destes dados e compare com a definição formal de média e variância de uma variável aleatória discreta.

3 Um alvo é feito com uma tábua quadrada pintada de branco, com excepção de um círculo no seu centro que é pintado de preto. As regras de uma prova são definidas da seguinte forma: o atirador que acertar no centro preto ganha 18 pontos, se acertar na parte branca da tábua ganha 8 pontos e se não acertar na tábua perde 2 pontos.

a) Um atirador atira no alvo: defina formalmente o espaço dos resultados deste experimento e a variável aleatória número de pontos.

b) O desempenho do atirador pode ser assim resumido: $P(\text{acertar no centro}) = 0.2$ e $P(\text{acertar na parte branca}) = 0.7$; calcule média e variância do número de pontos para o atirador.

4 Dada a função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 1 \\ 0.1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.3 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.7 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.8 & \text{se} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \leq x \end{cases}.$$

Calcule a função de probabilidade da variável cuja $f.d.a.$ é $F(\cdot)$. Calcule ainda o valor esperado, a moda, a mediana e a variância de X. Determine as seguintes probabilidades:

$$P(1 \leq X < 2),\ P(X = 4),\ P(X > 3),\ P(X \leq 4).$$

5 Com dados do último censo, a asistente social de um censo de saúde constatou que para as famílias da região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Determine a função de distribuição acumulada da variável N: número de filhos, e responda: se uma família é escolhida aleatóriamente nessa região qual a probabilidade de que o número de filhos nessa família seja maior o igual a 2?. Calcule o valor esperado e a variância da variável N.

6 Seja X uma variável aleatória tal que
$P(X=-1)=0.2; P(X=0)=0.1$ e $P(X=6)=0.7$.

a) Ache as funções de probabilidade das variáveis aleatórias

$$Y=3X+2,\ Z=-2X+1,\ U=X^2,\ V=X^3.$$

b) Verifique que $E(Y)=3E(X)+2;\ E(Z)=-2E(X)+1$ e $Var(Y)=9Var(X);\ Var(Z)=4Var(X)$.

c) As seguintes igualdades são válidas?: $E(U)=E(X)^2,\ Var(U)=Var(X)^2$.

d) Generalize as observações do itens b) válidas para X, para qualquer v.a. discreta que assume um número finito de valores e para qualquer função do tipo $W=a+bX$.

e) Seja X uma v.a. tal que $P(X=-1)=P(X=7)=0.3$ e $P(X=0)=P(X=1)=0.2$; ache a função de probabilidades de X^2.

7 Seja X uma v.a. discreta assumindo um número finito de valores e seja $h:R\to R$ uma função qualquer. Utilize o raciocínio do exercício anterior para deduzir a função de probabilidades de $Y=h(X)$.

8 Um sinal consite em uma série de vibrações de magnitude X, tendo os valores 1,0,-1, cada um com probabilidade 1/3. Um ruído consiste em uma série de vibrações de magnitude Y, tendo os valores 2,0,-2 com probabilidades 1/6,2/3,1/6, respectivamente. Se ruídos e sinais são combinados, a soma consiste em vibrações de magnitude $Z=X+Y$.
a)Construir e graficar a função de probabilidade para Z, calcular sua média e variância, admitindo a independência entre ruído e sinal.

b)Construir e graficar a função de distribuição acumulada para Z, F_Z, calcular $F_Z(1), F_Z(-1.5)$. Achar um valor z tal que $F_Z(z) = 11/18$, calcular o menor valor z tal que $F_Z(z) = 11/18$.
b)Um amplificador de vibrações permite a captação da magnitude $2Z$, determine a função de probabilidade, a acumulada, o valor esperado e a variância desta nova variável.

9 Considere X uma v.a. cuja função de distribuição acumulada F é dada por
$F(x) = 0$ se $x < -3$, $F(x) = 0.2$ se $-3 \leq x < 4$,
$F(x) = 0.9$ se $4 \leq x < 8$ e $F(x) = 1$ se $8 \leq x$.

a) Use F para calcular as probabilidades dos seguintes conjuntos:

$$\{3 < X \leq 7\}, \{3 \leq X \leq 7\}, \{3 \leq X < 7\}, \{3 < X < 7\}$$

$$\{-3 < X \leq 5\}, \{-3 \leq X \leq 5\}, \{-3 \leq X < 5\}, \{-3 < X < 5\}$$

$$\{X \leq 6\}, \{X < 6\}, \{X \leq 4\}, \{X < 4\}$$

$$\{3 \leq X\}, \{3 < X\}, \{4 \leq X\}, \{4 < X\}$$

$$\{10 \leq X\}, \{10 < X\}, \{-5 \leq X\}, \{5 < X\}, \{X < -11\}, \{20 \leq X\}$$

b) Calcule a função de probabilidades de X e recalcule as probabilidades do item anterior.

c) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

10 Um experimento consiste em jogar uma moeda equilibrada 4 vezes. Calcule a função de probabilidades e a distribuição acumulada das seguintes variáveis aleatórias.

a) O número de caras antes da primeira coroa.

b) O número de caras que há depois da primeira coroa.

c) O número de caras menos o número de coroas.

d) O número de caras vezes o número de coroas.

11 Sejam A e B dois eventos e sejam I_A e I_B as variáveis aleatórias indicadoras associadas aos conjuntos A e B.
Demonstrar que $I_{A \cap B} = I_A I_B$ e que $I_{A \cup B} = \max\{I_A, I_B\}$

12 Um bit (0 ou 1) de informação é transmitido por um canal com ruído. Seja p a probabilidade de que seja erradamente recebido. Para melhorar a transmissão uma alternativa é utilizar um decodificador de maioria de dois en três, ou seja, enviar de forma independente 3 vezes a mesma informação registrando como resultado aquela que foi recebida pelo menos duas vezes. Para qué valores de p é o decodificador de maioria de dois em três melhor que a transmissão pela única vez?

13 Um exame "múltipla escolha" consta de 20 perguntas, cada uma delas com 4 opções. Um estudante pode descartar por errada duas destas opções em cada uma das perguntas e escolhe a resposta ao acaso entre as duas restantes. Para aprovar o exame o aluno deve responder correctamente 12 ou mais perguntas. Qual é a probabilidade de que o estudante aprove o exame?

14 Três moedas são lançadas simultâneamente. Repetimos o experimento até obter "cara-cara-cara". Qual é a probabilidade de ter que repetir mais de 3 vezes o experimento?

15 Um joguinho de computador consiste na seguinte actividade: um gatinho com 3 vidas vai percorrendo diversas telas, até chegar à tela 15 que é a última. Se a probabilidade de que o gatinho morra em cada tela é igual a 0.25, calcular a probabilidade de:

a) ganhar o jogo

b) perder na tela número 10

c) perder na tela número 3

d) ganhar o jogo sem perder nenhuma vida.

5 Variáveis Aleatórias Contínuas

1 Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

a) Calcule a distribuição acumulada $F(x)$, o valor esperado $E(X)$, a variância $Var(X)$ e o desvío padrão $\sigma(X)$.

b) Calcule $P(0 < X < 1/2), P(1/3 < X \leq 1)$.

c) Grafique $F(x)$ e determine o valor de x_0 tal que $F(x_0) = 0.95$. Calcule $P(x_0 < X \leq 1)$. Interprete.

d) Considere a v.a. $Y = X + a$, onde a é uma constante, determine (nesta ordem) a $E(Y)$ e a densidade de Y.

e) Considere a v.a. $W = \alpha X$, onde α é uma constante e determine (nesta ordem) a $E(W)$ e a distribuição acumulada de W.

f) Considere a seguinte função definida no intervalo $[a, b]$ com a e b constantes conhecidas:

$$f(x) = \beta x, \;\; a \leq x \leq b;$$

i) Determine o valor de β que permita garantir que f seja uma densidade.

ii) Se U possui a densidade f, calcule a $E(U)$.

iii) Determine o valor da acumulada de U em $E(U)$.

2 Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \quad\;\;\; \text{caso contrario} \end{cases} .$$

a)Determinar o valor k.
b)Calcular $E(X), Var(X)$.
c)Determine a f.d.a. de X.

d)Considere a seguinte função definida no intervalo real $[a, b]$

$$f(x) = kx^2, \ \ a \leq x \leq b,$$

i) Supondo a e b valores conhecidos determine o valor de k tal que f seja uma densidade.

ii) Se S possui a densidade f, determine o valor de s_0 tal que $P(s_0 \leq S) = 1/2$.

3 Considere a *f.d.a.* Cauchy, dada pela seguinte forma

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x), \ \ x \in R$$

a)Calcular a função de densidade f e demonstrar que f é uma função de densidade.
b)Achar x tal que $P(X > x) = 0.1$.

4 (Exercício auxiliar)A função gama é uma função factorial generalizada definida nos reais positivos:

$$\Gamma(u) := \int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}dt, \quad u > 0.$$

a) Demonstrar que $\Gamma(1) = 1$,

b) Demonstre que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,

c) Demonstre que $\Gamma(n) = (n-1)!, \ \ n = 1, 2, 3, \cdots$

d) Assuma que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ para demonstrar que se n é inteiro impar então

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(n-1)!}{2^{n-1}(\frac{n-1}{2})!}$$

5 Seja X uma variável aleatória cuja densidade é

$$f(x) = k\cos(x), \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

a) Determinar o valor da constante k que faz de f uma densidade.

b) Calcular $E(X)$ e $Var(X)$.

6 Modelos Discretos.

1 Discuta a validade do modelo Uniforme Discreto nos seguintes casos:
a)A escolha de um aluno que vai representar a classe junto a direção da escola.
b)O dia da semana em que ocorrem mais acidentes de trabalho numa industria.
c)O mês do ano com maior número de enchentes na cidade de São Paulo.

2 Sendo X uma variável seguindo o modelo Uniforme Discreto, com valores no conjunto $\{1, 2, \cdots, 10\}$ pergunta-se:
a)$P(7 \leq X)$
b)$P(3 < X \leq 7)$
c)$P(X < 2 \, ou \, 8 \leq X)$
d)$P(5 \leq X \, ou \, 8 < X)$
e)$P(X > 3 \, e \, X < 6)$
f)$P(X \leq 9 | 6 \leq X)$

3 Seja X uma v.a. discreta Uniforme em $\{1, 2, \cdots, n\}$, isto é,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \;\; k = 1, \cdots, n$$

Calcular $E(X)$ e $Var(X)$ lembrando que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \; \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4 Discuta a validade do modelo Binomial nos seguintes casos:
a)Dos alunos de uma grande universidade, sorteamos 5 e contamos quantos se declaram usuários de drogas.
b)Escolhemos 20 lâmpadas ao acaso na prateleira de um supermercado, sendo 10 de uma fábrica e 10 de outra. Contamos o número total de defeituosas.
c)Quinze automóveis 0 km de uma mesma marca e tipo são submetidos a um teste anti-poluição e contamos o número deles que passaram no teste.

d)Um motorista é submetido a um teste em que deve estacionar seu veículo num pequeno espaço (isto é popularmente chamado de fazer baliza). Em 10 tentativas, contamos o número de vezes em que o motorista estacionou corretamente.

5 Uma urna contém 50 bolas, sendo 20 brancas e 30 vermelhas. São extraídas 10 bolas, uma após outra, com reposição. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

a) o número de bolas vermelhas extraídas é igual a 4;

b) o número de bolas brancas extraídas é igual a 1;

c) pelo menos duas bolas vermelhas são extraídas;

d) no máximo 3 bolas vermelhas são extraídas.

Qual é o número médio de bolas brancas (vermelhas) extraído?. Quais são as variâncias do número de bolas brancas e vermelhas extraído?. Analise a aderência às hipóteses do modelo utilizado para responder as perguntas acima caso as extrações sejam sem reposição.

6 Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que tem essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos a cirurgia. Fazendo alguma suposição adicional que julgar necessária, responda qual é a probabilidade de:

a) Todos serem curados?.

b) Pelo menos dois não serem curados?.

c) Ao menos 10 ficarem livres da doença?.

7 Um comerciante deseja comprar um lote de 200 mesas a uma fábrica. O lote oferecido tem 10 mesas defeituosas (mas o comerciante desconhece este fato). O comerciante adota a seguinte regra de decisão: ele observará uma amostra de 20 mesas escolhida por sorteio e aceitará o lote se ele tiver até 2 mesas defeituosas. Quál é a probabilidade do comerciante aceitar o lote nas condições acima detalhadas?
Nas situações reais a amostragem é feita sem reposição, qué modelo acha apropriado para esta situação?

8 Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuições $Bin(n,p)$ e $Bin(n,1-p)$ respectivamente. Demonstre que para todo j inteiro, $0 \leq j \leq n$, $P(Y=j) = P(X=n-j)$. Ache a relação existente entre $E(X)$ e $E(Y)$ e entre $Var(X)$ e $Var(Y)$.

9 Uma companhia de seguros vendeu apólices a 20 pessoas da mesma idade e condições de saúde. De acordo com as tábuas atuariais, a probabilidade de que uma pessoa nas condições dos asegurados sobrevida 10 anos à data dos contratos é de 0.9. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

a) todas as pessoas sobrevivem;

b) nenhuma sobrevive;

c) sobrevivem ao menos 5 pessoas;

d) sobrevivem ao menos 15 pessoas;

e) morrem exatamente 3 pessoas;

f) morrem no máximo 2 pessoas;

g) morrem no mínimo 5 pessoas.

Calcule o número médio de sobreviventes e o número médio de mortos aos 10 anos do contrato. Calcule as variâncias do número de mortos e do número de sobreviventes aos 10 anos de contrato.

10 Seja X uma variável aleatória Geométrica, demonstrar as seguintes propriedades:

a) $P(X=j+1) = (1-p)P(Y=j), \;\; j = 1,2,3,\cdots$.
Logo, usando esta propriedade calcule a moda da distribuição.

b) $P(j \leq X) = (1-p)^{j-1}, \; j$ natural.

c) $P(X > j+k | X > j) = P(X > k), \;\; \forall j,k$ naturais.
Propriedade conhecida com o nome de *falta de memória*.

11 Um banco de sangue necessita sangue tipo 0-Rh negativo. Suponha que a probabilidade de uma pessoa ter este tipo de sangue seja 0.10. Doadores permanentes chegam ao hemocentro para fazer sua doação rotineira. Calcule as probabilidades de que o primeiro doador com sangue tipo 0 Rh-negativo seja: a) o primeiro a chegar; b) o segundo; c) o quarto; d) o sétimo.
Calcule ainda:

a) a probabilidade de que o primeiro doador com sangue tipo 0-Rh negativo apareça a partir do quarto doador;

b) a probabilidade de que o primeiro doador com sangue tipo 0-Rh negativo apareça no máximo em 5 tentativas.

12 A variável H segue o modelo Hipergeométrico com parâmetros $N = 10$, $n = 5$ e $r = 4$ (N : tamanho da população, n : tamanho da amostra, r : número de objetos com a característica de interesse). Determine:
a)$P(H = 2)$
b)$P(H \leq 1)$
c)$P(H > 0)$

13 Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas com boas formando um lote com 12 peças no total. Escolhendo ao acaso 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:
a)Pelo menos 2 defeituosas.
b)No máximo uma defeituosas.
c)No mínimo 1 boa.

14 Um supermercado vende uma caixa com 20 lâmpadas, das quais 4 são inúteis e as restantes boas. Um comprador decide testar 5 das lâmpadas (obviamente sem reposição) ecolhidas ao acaso e comprar a caixa caso haja no máximo duas defeituosas entre as lâmpadas testadas. Qual é a probabilidade de comprar a caixa? Ache a distribuição do número de itens defeituosos.

15 Uma urna contém bolas vemelhas (V) e brancas (B). São extraídas 5 bolas da urna. Calcule as probabilidades de extrair 2 vermelhas e 3 brancas, nas seguintes condições:

a) a urna tem 4 V e 6 B, extração sem reposição (resposta:10/21)

b) a urna tem 8 V e 12 B, extração sem reposição (resposta:385/969)

c) a urna tem 16 V e 24 B, extração sem reposição (resposta:10120/27417)

d) a urna tem 48 V e 72 B, extração sem reposição (resposta: 934360/2646917)

e) a urna tem 40 % de bolas V e 60 % de bolas B, extração com reposição (resposta:0.3456)

16 Uma população tem N elementos divididos em duas classes, A e B; M elementos estão na classe A e $N-M$ na classe B. Escolha n elementos desde a população de N elementos, sem reposição ($n \leq N$). Defina $X = \#$ de elementos da classe A coletados na amostra de tamanho n. Logo, X possui distribuição Hipergeométrica de parâmetros N, M e n. Demonstre que se $p = \frac{M}{N}$

$$P(X=j) = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) p^j (1-p)^{n-j} \frac{\prod_{i=1}^{j-1}(1-\frac{1}{M}) \prod_{k=1}^{n-j-1}(1-\frac{k}{N-M})}{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\frac{s}{M})}$$

17 A variável aleatória Y tem densidade Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. Obtenha:
a)$P(Y < 2)$
b)$P(2 \leq Y < 4)$
c)$P(Y > 0)$
d)$P(Y = 1|Y < 3)$

18 A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2. Uma chapa e sorteada ao acaso para ser inspeccionada, pergunta-se a probabilidade de:
a)Encontrarmos pelo menos 1 defeito.
b)No máximo 2 defeitos serem encontrados.
c)Encontrar de 2 a 4 defeitos.
d)Não mais de um defeito ser encontrado.

19 Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuiçao de Poisson, com media de 8 chamadas por minuto. Determinar qual é a probabilidade de que num minuto se tenha:
a)10 ou mais chamadas,
b)menos do que 9 chamadas,
c)entre 7 (inclusive) e 9 (exclusive).

20 Calcular $E(\frac{1}{X+1})$ se X é uma v.a. $Poisson(\lambda)$.
Lembre que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$.

21 Demonstre a seguinte propriedade da distribuição $Poisson(\lambda)$ e usando essa propriedade calcule a moda da distribuição,

$$P(X = j + 1) = \frac{\lambda P(X = j)}{j + 1}, \quad j \text{ inteiro não negativo}$$

22 Um entrevistador é contratado pela empresa Tomatinho para entrevistar indivíduos da cidade de Campinas. Deve perguntar a cada indivíduo se consome ou não o molho tipo Pomarola dessa marca. Sabendo que a proporção de usuários deste produto é 0.4,

a) Qual é a probabilidade de que um Indivíduo entrevistado ao acaso não seja usuário do produto?

b) Para um anuncio de TV deseja-se achar 25 clientes do supermercado que sejam consumidores de Pomarola da marca Tomatinho. Se desejamos entrevistar a 100 clientes, qual é a probabilidade de encontrar exactamente 25 usuários do produto?. Qual é a probabilidade de achar entre 22 e 25 usuários do produto?

c) Para melhorar o sabor do produto Pomarola, a empresa deseja conhecer a opinião de 30 usuários do produto. Para isto se pede ao entrevistador que pare de entrevistar quando achar exactamente 30 usuários do produto. Qual é a probabilidade de que isto aconteça ao entrevistar a pessoa número 60?

d) Tomatinho deseja premiar a um consumidor do produto Pomarola, para isto pede ao entrevistador que accione um alarme ao achar ao primeiro usuário do produto. Se o entrevistador entrevista a 25 pessoas por hora, qual é a probabilidade de que o alarme seja accionado na primeira hora?

e) Tomatinho deseja realizar a mesma experiência pero com outro produto, “Molho Manjericão”; neste caso a empresa não conhece a proporção de usuários do produto em Campinas, mas conhece os resultados de uma pesquisa feita no ano 2000, na qual de 1000 usuários 200 declararam consumir tal produto. Responder a), b), c) e d) neste caso.

7 Modelos Contínuos.

1 O cumprimento do lado de um quadrado aleatório é uma v.a. uniforme em [0,5]. Calcular a área esperada do quadrado.

2 Prove que se X possui distribuição $U[a,b]$, então $Z := (X-a)/(b-a)$ tem distribuição $U[0,1]$. Reciprocamente, demonstre que se Z possui distribuição $U[0,1]$, então $X := (b-a)Z + a$ tem distribuição $U[a,b]$.

3 Seja X uma v.a. cuja f.d.a. é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -1 \\ (x+1)/4 & \text{se} \quad -1 \leq x < 1 \\ 2x - x^2/2 - 1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se} \quad 2 \leq x \end{cases} .$$

i) Calcule a função de densidade de X. É possível e/ou importante calcular o valor da densidade em -1,1 e 2?

ii) Grafique as funções de densidade e de distribuição acumulada de X, responda: por que X é considerada contínua?

iii) Determine: $E(X)\,, E(X^2)\,, Var(X)\,, Mediana(X)\,, Moda(X)$, função geradora de momentos de X.

iv) Calcule as probabilidades dos seguintes conjuntos: $\{X = -2\}$, $\{X = -1\}$, $\{X = 0\}$, $\{X = 1/2\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = 8\}$, $\{X < -2\}$, $\{X < 1.5\}$, $\{X < 4\}$, $\{X > 1.5\}$, $\{X > 4\}$, $\{X \leq 0\}$, $\{0 \leq X\}$, $\{0 < X < 1.5\}$, $\{-2 < X < 0\}$, $\{0 \leq X < 1.2\}$, $\{1.1 \leq X \leq 3\}$, $\{-2 \leq X < 9\}$, $\{-2 \leq X < 1.5\}$, $\{3 \leq X < 6\}$.

4 Suponha que a duração de uma componente eletrônica possui distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$, calcule:
a)A probabilidade de que a duração seja menor a 10.
b)A probabilidade de que a duração esteja entre 5 e 15.
c)O valor t tal que a probabilidade de que a duração seja maior a t assuma o valor 0.01.

5 A longitude do lado de um cubo aleatório é uma v.a. contínua Exp(3). Calcule o volume esperado do cubo.

6 Prove que a distribuição exponencial tem propriedade de falta de memória

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t), \ \forall s, t, \text{ positivos}$$

É possível demonstrar que esta distribuição é a única com esta propriedade, com suporte nos reais positivos. Compare com a distribuição Geométrica.

7 Seja X v.a. com distribuição $Exp(\alpha)$, e seja $k > 0$, demonstre que $Y := kX$ possui distribuição $Exp(\alpha/k)$.

8 Dado um número real u, seja $[seg(u)] :=$ inteiro imediatamente seguinte a u. Se U possui distribuição $Exp(\alpha)$ demonstre que, $[seg(u)]$ possui distribuição $Geo(1 - e^{-\alpha})$.

9 Seja T a v.a. contínua de distribuição exponencial de parâmetro 2.

i) Seja X a v.a. discreta definida como
$$X = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq T < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq T < 2 \\ 2 & \text{se} \quad 2 \leq T \end{cases} .$$
Determine a função de probabilidades de X.

ii) Seja Y uma v.a. discreta definida da seguinte forma:

$$Y = k \ \text{ se } \ k \leq T < k + 1, \ \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

Determine a distribuição de Y.

10 Assuma que o tempo de duração X de uma consulta médica tenha distribuição exponencial com média de 10 minutos. Calcule a probabilidade dos seguintes eventos:

i) uma consulta demora 20 minutos no máximo,

ii) uma consulta demora mais de 20 minutos,

iii) uma consulta demora mais que o tempo médio.

Calcule a probabilidade do evento $\{X > E(X)\}$ para X com distribuição $Exp(\alpha)$, $\forall \alpha > 0$.

11 Um processo de Poisson tem um número médio λ de ocorrências por unidade de tempo u. Seja T o tempo medido em unidades u transcorrido entre duas ocorrências consecutivas. Demonstre que T tem distribuição exponencial de parâmetro λ.
Dica: prove que se $0 \leq t$, então $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.

12 Se T é uma v.a. de distribuição exponencial e $P(T < 1) = 0.05$, determinar o parâmetro λ da distribuição de T.

13 Considere a densidade da distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}), \ -\infty < x < \infty$$

Demonstre:

i) $\varphi(\cdot)$ é estritamente crescente em $(-\infty, \mu)$ e estritamente decrescente em (μ, ∞),

ii) $\varphi(\cdot)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e portanto contínua,

iii) $lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$,

iv) sendo $\varphi(\cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e dado i), tem-se que $\varphi(\cdot)$ tem um máximo relativo em μ,

v) tendo $\varphi(\cdot)$ máximo relativo em μ e dado que
$\varphi(\mu) > 0$ e $lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$, o máximo em μ é absoluto,

vi) estudando a segunda derivada de $\varphi(\cdot)$ verifique que $\varphi(\cdot)$ apresenta dois pontos de inflexão: $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$, determine ainda que $\varphi(\cdot)$ é côncava para cima em $(-\infty, \mu - \sigma)$ e $(\mu + \sigma, \infty)$ e côncava para baixo em $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$

vii) verifique que $\varphi(\cdot)$ é simétrica a respeito de μ e mostre que μ é moda, mediana e média de uma variável aleatória cuja densidade é dada por φ.

14 Seja X uma v.a. com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$

i) Prove que $Z := (X - \mu)/\sigma$ tem distribuição $N(0, 1)$. Para demonstrar a afirmação anterior verifique que

$$\Phi(t) = F(\mu + \sigma t),$$

onde Φ representa a acumulada da variável Z, $N(0, 1)$ e F representa a acumulada da v.a. X, $N(\mu, \sigma^2)$.

ii) Demonstre ainda que se φ_0 representa a densidade de Z, $N(0,1)$ e φ representa a densidade de X, $N(\mu, \sigma^2)$, tem-se a seguinte relação:

$$\varphi_0(t) = \sigma\varphi(\mu + \sigma t).$$

iii) Verifique ainda as seguintes relações entre X e Z

$$F(x) = \Phi((x - \mu)/\sigma), \ \varphi(x) = \sigma^{-1}\varphi_0((x - \mu)/\sigma)$$

15 Seja X uma v.a. Normal com média $\mu = 5$ e desvío $\sigma = 10$. Calcular

i) $P(X < 0)$, $P(X > 10)$, $P(15 \leq X)$

ii) $P(-20 < X < 15)$, $P(-5 \leq X \leq 30)$

ii) Achar x tal que co $P(X > x) = 0.05$

16 Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

i) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$

ii) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

iii) o número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0.99$

iv) o número a tal que $P(X > a) = 0.90$.

v) Demonstre ainda que $P(|X - \mu| \leq 0.675\sigma) = 0.5$

17 Considere o peso de um leão africano macho adulto como uma v.a. com distribuição $N(400kg, 100kg^2)$ e também o peso de um cachorro Pastor Alemão macho adulto como uma v.a. $N(35kg, 4kg^2)$. Compare, nas três situações seguintes, os pesos dos leões e cachorros (machos adultos) e decida quem é o mais pesado em termos relativos, isto é, levando em consideração a espécie. Justifique suas afirmações,

i) peso do leão: 386.5 kg; peso do cachorro: 36.48 kg;

ii) peso do leão: 424.2 kg; peso do cachorro: 38.70 kg;

iii) peso do leão: 384.0 kg; peso do cachorro: 31.80 kg.

18 Suponha que o tempo de duração dos pneus fabricados por Bolinha possuem distribuição normal de média μ e variância σ^2. Um cliente compra um pneu e conjuntamente adquire um seguro de garantia do pneu, ele somente precisa escolher entre dois possíveis planos de seguro. O primeiro plano de seguro exige que o fabricante do pneu reembolse 100 reais ao cliente se o tempo de vida do pneu for menor o igual a $\mu-\sigma$; o fabricante tem um credito de 100 reais se o pneu durar mais de $\mu+\sigma$. O segundo plano penaliza ao fabricante com um reembolso de 100 a favor do cliente se a vida do pneu for menor o igual a $\mu-3\sigma$ e premia ao fabricante com um credito de 100 reais se este durar mais de $\mu+3\sigma$. Em média, que plano resulta mais conveniente para o cliente ?, que plano resulta mais conveniente para o fabricante dos pneus?.

19 Considere o peso de um puma macho adulto como uma v.a. $N(\mu,\sigma^2)$. Sabe-se que 33.0% destes animais tem peso inferior a 82.8 kg e também que 0.4% tem peso superior a 98.25 kg. Calcule μ e σ.

20 Seja X uma v.a. $Gama(t,\lambda)$. Estude detalhadamente o comportamento de X de acordo com os valores $t>0$ e $\lambda>0$. (Gráficos, esperança, variância, simetria, etc.)

21 Seja X uma v.a. com distribuição $Gama(1,1/10)$.

i) Qual a esperança e a variância de X?

ii) Calcule a probabilidade para cada um dos seguintes eventos: $\{X<0\}$, $\{X=0\}$, $\{X\leq 0\}$, $\{X>3\}$, $\{3\leq X\}$, $\{8\leq X\leq 11\}$.

iii) Estime, pela desigualdade de Tchevichev, $P(X>x)$, e compare com o valor exato para $x=1;10;50;100$. Interprete.

22 Seja X uma v.a. com distribuição $Gama(10,1/2)$. Recalcule todos os itens do exercício anterior.

23 Demonstre a invariância da família de distribuições Gama. Into é, se X é uma v.a. de distribuição $Gama(r,\lambda)$, então $Y=aX,\ a>0$, tambén terá distribuição Gama com parâmetros r e λ/a.
Pode afirmar que $W=aX+b,\ b>0$ possui distribuição Gama?

24 Função Beta: Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, números reais. A função Beta, escrita como $B(\alpha, \beta)$, $B : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, é definida pela seguinte integral

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Demonstre que $\forall \alpha > 0,\ \beta > 0,\ B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

25 Uma variável aleatória X tem distribuição de Laplace com parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua densidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Determine a f.d.a. de X.

26 Seja X uma v.a. com distribuição $Beta(\alpha, \beta)$. Defina a v.a. Y como sendo $Y := \frac{\beta X}{\alpha(1-X)}$. Obtenha a função de densidade de probabilidade de Y.
A v.a. Y construída deste modo possui distribuição denominada $F-Snedecor$ com 2α e 2β graus de liberdade.

27 Seja X uma v.a. contínua com densidade de probabilidade f, que depende apenas de X e de um parâmetro θ. Dizemos que f pertence à família exponencial uniparamétrica de distribuições se f pode ser escrita da seguinta forma:

$$f(x) = S(x)T(\theta)e^{a(x)b(\theta)},$$

$\forall x \in D$, onde D representa algum domínio que não depende do parâmetro θ nem das funções S, T, a, b.
Verifique quais das seguintes distribuições pertencem à família exponencial:

i) distribuição Uniforme em $(0, A)$, $A < \infty$;

ii) distribuição Normal de média μ e variância 4;

iii) distribuição Exponencial com parâmetro λ, $\lambda > 0$;

iv) distribuição Beta com parâmetros α e β, α conhecido.

8 Transformações. Tchebichev.

1 Seja X v.a. $N(0, \sigma^2)$, calcule a densidade de $Y = |X|$.

2 Demonstrar que se U é Uniforme em $[0, 1]$, $1 - U$ também é.

3 Seja U Uniforme em $[0, 1]$, determine a densidade de $\sqrt{U + 2}$.

4 Seja U Uniforme em $[0, 1]$, determine a densidade de $Y = -\ln(U)$.

5 Seja U Uniforme em $[-1, 1]$, determine a densidade de U^2.

6 Uma partícula de massa m possui velocidade aleatória V, normalmente distribuída com parámetros $\mu = 0$ e σ. Calcule a densidade da energía cinética $E = \frac{1}{2}mV^2$.

7 Se X é Uniformemente distribuída em (a, b), qual v.a. que possui uma relação linear com X é Uniformemente distribuída no intervalo $(0, 1)$? Ou seja, determine α e β, nos reais tais que $Y = \alpha X + \beta$ tem distribuição Uniforme em $(0, 1)$.

8 Seja X uma v.a. $N(\mu, \sigma^2)$.

i) Calcule a densidade da variável aleatória $Y = e^X$. Esta distribuição é conhecida por *Lognormal*.

ii) Verifique que $W = \ln(Y)$ possui distribuição Normal.

9 Seja X uma v.a. $N(0, 1)$. Seja $Y = X^2$. Demonstre que Y possui distribuição qui-quadrado χ^2 com 1 grau de liberdade.

10 *Gerando Variáveis Aleatórias discretas desde um gerador uniforme de números.* Suponha que F é a distribuição acumulada de uma v.a. que toma valores inteiros. Seja U uma v.a. de distribuição Uniforme em $[0, 1]$. Definir a variável aleatória $Y = k$ se $F(k - 1) < U \leq F(k)$. Demonstre que a distribuição acumulada de Y é F. Aplique este resultado para gerar variáveis aleatórias Geométricas desde variáveis Uniformes.

11 De que forma podería gerar variáveis aleatórias cuja densidade fosse

$$f(x) = \frac{1 + \alpha x}{2}, \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq \alpha \leq 1 \ ?,$$

usando um gerador que fabricasse unicamente variáveis Uniformes em $[0, 1]$.

12 Suponha que X tem distribuição Poisson de parâmetro λ. Use a desigualdade de Tchebichev para verificar que $P(X > 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

13 Seja X uma v.a. inteira não negativa, com função geradora de momentos $M_X(t) = E(e^{tX})$, finita para todo t. Seja x_0 um número inteiro positivo. Mostre que

$$P(x_0 \leq X) \leq \frac{M_X(t)}{e^{tx_0}},\ t > 0.$$

Esta desigualdade recebe o nome de Desigualdade de Chernoff.

14 Suponha que X tem distribuição Poisson de parâmetro λ. Mostre que

$$P(2\lambda \leq X) \leq \left\{\frac{e}{4}\right\}^{\lambda}$$

Dica: Use o exercício anterior tomando t^* tal que

$$\frac{M_X(t^*)}{e^{t^*2\lambda}} = \min_{t>0} \frac{M_X(t)}{e^{t2\lambda}}$$

15 Seja X v.a. não negativa tal que $\mu = E(X)$. Mostre que $P(2\mu \leq X) \leq \frac{1}{2}$. Interprete o resultado.

16 Seja X v.a. tal que $\mu = E(X)$ e $Var(X) = \sigma^2$. Mostre que

$$P(k\sigma \leq |X - \mu|) \leq \frac{1}{k^2},\ k \in N.$$

Interprete o resultado.

17 Seja Y uma v.a. com densidade $f(y) = \frac{1}{m!}y^m e^{-y},\ y > 0, m$ natural. Prove que

$$\frac{m}{m+1} \leq P(0 \leq Y \leq 2(m+1)).$$

18 Sabe-se que o número de itens produzidos em uma fábrica durante uma semana é uma v.a. X com média 50.

i) O que se pode afirmar sobre a probabilidade de X exceder 100 unidades?;

ii) se a variância de X é 50, o que se pode afirmar sobre a probabilidade de X exceder 100 unidades?;

iii) compare os resultados de a) e b).

9 Introdução a Variáveis Discretas Multidimensionais.

1 Consideremos o conjunto das 32 cartas utilizadas para jogar pôquer, isto é, sete, oito, nove, dez, valete, dama, rei e ás, dos quatro naipes. Estas cartas são bem embaralhadas e duas cartas são dadas a uma pessoa. Considere as variáveis X igual ao número de ases que a pessoa recebe e Y igual ao número de cartas de copas que ela recebe. Determinar a distribuição de probabilidades de (X, Y).

2 Suponha que três bolas são selecionadas ao acaso de uma urna contendo três bolas vermelhas, quatro bolas brancas e cinco bolas azuis. Sejam X e Y respectivamente o número de bolas vermelhas e o número de bolas brancas escolhidas. Determine,

i) a distribuição de probabilidades de (X, Y);

ii) as marginais de X e Y;

iii) $P(X = Y)$.

3 Dois dados honestos são lançados. Obtenha a distribuição conjunta de (X, Y) quando:

i) X é o valor obtido no primeiro dado e Y é o maior valor observado.

ii) X é o menor valor observado e Y é o maior valor observado.

iii) X é o maior valor observado e Y é a soma dos valores obtidos.

4 Uma urna contém 3 bolas numeradas 1, 2, e 3. Duas bolas são tiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola tirada e Y o número da segunda.

i) Descreva a distribuição conjunta de (X, Y).

ii) Calcule $P(X < Y)$.

5 Considere um par de v.a. discretas (X, Y) cuja função de distribuição acumulada é F; isto é, $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Sejam F_X e F_Y as acumuladas marginais de X e Y respectivamente. Mostre que

$$P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y)$$

6 Considere a situação do exercício 1. Determine a probabilidade de se obter, dentre as três bolas selecionadas, pelo menos uma bola vermelha e pelo menos uma bola branca, através da expressão do exercício anterior.

7 A distribuição de probabilidades conjunta de (X, Y) é dada por $p(1,1) = 1/8; p(1,2) = 1/4; p(2,1) = 1/8; p(2,2) = 1/2.$

i) Calcule $P(XY \leq 3); P(X + Y > 2)$.

ii) X e Y são independentes?

8 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma sequência de ensaios Bernoulli independentes e de parâmetro p. Determine a f.g.m. $M_Z(t)$, onde $Z := X_1 + \cdots X_n$. Reconhece a distribuição de Z? Calcule esperança e variância de Z.

9 Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma sequência de v.a.i.i.d. (v.a. independentes e idênticamente distribuídas) $Geo(p)$. Defina $Z := X_1 + \cdots X_n$ e determine a f.g.m. de Z. Usando a f.g.m. calcule $E(Z)$, $Var(Z)$.
Note que a v.a. Z definida como soma de geométricas independentes recebe o nome de v.a. $Pascal(n, p)$ ou *Binomial Negativa* e conta o número de ensaios independentes necessários até obter n sucessos (incluído o último deles).

10 Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada pela seguinte tabela

Y / X	-1	0	1
-1	0	1/5	0
0	1/5	1/5	1/5
1	0	1/5	0

i) Determine a função de distribuição acumulada de (X, Y).

ii) Calcule as funções de probabilidade marginais para X e Y respectivamente.

iii) Determine as acumuladas marginais de X e Y.

iv) X e Y são independentes?. Justifique.

11 Suponha que $F(x)$ é uma f.d.a. Mostre que: (a)$F^n(x)$ e (b)$1 - [1 - F(x)]^n$ são funções de distribuição acumulada, onde n é um natural.
Dica: Considere $X_1, \cdots X_n$ v.a. independentes com a mesma f.d.a. F e defina $Y := \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ e $Z := \min\{X_1, \cdots, X_n\}$.