

Modelo Uniforme

- ▶ Exemplo: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?
 - ▶ espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
 - ▶ assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com $\frac{1}{100}$ para cada um.
 - ▶ como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
 - ▶ assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

Modelo Uniforme

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Modelo
 - ▶ X é uma variável aleatória cujos possíveis valores são representados por $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
 - ▶ X segue o modelo uniforme discreto se atribui a mesma probabilidade $\frac{1}{k}$ a cada um desses possíveis valores
 - ▶ $P(X = x_j) = \frac{1}{k} \quad \forall 1 \leq j \leq k$
 - ▶ $E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
 - ▶ $Var(X) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2$
- ▶ Compare este modelo com a estatística descritiva do início de semestre...

Propriedade Geral da Variância

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

► Definição: $Var(X) = E([X - E(X)]^2)$

$$= E([X - \mu_X]^2) = E(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2$$

$$= \mu_{X^2} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - \mu_X^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

► Então: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Modelo Uniforme

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Retomando o modelo da uniforme
 - ▶ já sabemos que $E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
 - ▶ portanto $[E(X)]^2 = \frac{1}{k^2} (\sum_{i=1}^k x_i)^2$
 - ▶ $E(X^2) = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2$
 - ▶ finalmente $Var(X) = \frac{1}{k} [\sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{k} (\sum_{i=1}^k x_i)^2]$

Modelo Uniforme

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Exemplo: $X =$ resultado obtido no lançamento de um dado honesto

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- ▶ $E(X) = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$
- ▶ $Var(X) = \frac{1}{6} [(1+4+9+16+25+36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17.5$

Modelo Uniforme

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Cálculo da f.d.a. de uma variável uniforme discreta:

- ▶ $F(x) = P(X \leq x) = \frac{n(x)}{k}$

- ▶ $n(x) = \text{número de } x_i\text{'s tais que } x_i \leq x$

- ▶ Retomando o exemplo do dado:

- ▶ $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

- ▶ $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

Modelo Bernoulli

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Ensaios tipo Bernoulli: estamos interessados na ocorrência de um sucesso ou fracasso.
- ▶ Exemplo: uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto. As possíveis respostas são apenas "Sim" ou "Não".
- ▶ $X = \begin{cases} 1, & \text{evento de interesse ocorre} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- ▶ $\Omega = \{0, 1\}$
- ▶ $P(X = 1) = P(\text{sucesso}) = p \Rightarrow P(X = 0) = P(\text{fracasso}) = 1 - p$

Modelo Bernoulli

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Forma geral de escrever a probabilidade de uma variável

Bernoulli:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ em que } x = 0, 1$$

- ▶ $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

- ▶ $E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$

- ▶ $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

- ▶ f.d.a.:
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Modelo Bernoulli

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Exemplo: lançamos um dado e consideramos como sucesso, a obtenção da face 5. Supondo que o dado é honesto:

x	0	1
$p(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

- ▶ $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$ em que $x = 0, 1$
- ▶ $E(X) = \frac{1}{6}$
- ▶ $E(X^2) = \frac{1}{6}$
- ▶ $Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$

Modelo Binomial

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ A repetição de ensaios Bernoulli independentes dá origem a uma variável aleatória Binomial.
- ▶ Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um submetido a testes para averiguar se está imunizado. Nesse caso, consideramos como sucesso, a imunização.
 - ▶ $X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo } i \text{ está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
 - ▶ pelo enunciado, sabe-se que $P(X_i = 1) = p = 0.8$

Modelo Binomial

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ As respostas associadas aos indivíduos X_1 , X_2 e X_3 são independentes e cada uma é uma variável Bernoulli
- ▶ Se o interesse está em estudar $X =$ número de indivíduos imunizados no grupo, X poderá assumir valores em $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$
- ▶ Note que $X = X_1 + X_2 + X_3$

Modelo Binomial

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propiedades

Hipergeométrica

Poisson

evento	P(evento)	X
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

Modelo Binomial

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Assim, as probabilidades de cada valor possível de X são:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

- ▶ E o comportamento de X é completamente determinado pela função

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0.8)^x (0.2)^{3-x}$$

onde $x = 0, 1, 2, 3$.

Modelo Binomial

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Modelo Geral: Considere a repetição de n ensaios X_i Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p . A variável aleatória $X = X_1 + \dots + X_n$ que representa o total de sucessos pertence ao modelo Binomial com parâmetros n e p .

- ▶ A probabilidade de se observar x é dada pela expressão geral

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x = 0, 1, \dots, n;$$

- ▶ $E(X) = np$; $Var(X) = np(1-p)$;
- ▶ notação: $X \sim Bin(n, p)$

Modelo Binomial

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ No exemplo da vacina, temos então $n = 3$ e $p = 0.8$
 - ▶ $X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$
 - ▶ $E(X) = 3 \times 0.8$
 - ▶ $\text{Var}(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2$

Propriedades da Esperança e Variância

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ A esperança de uma soma de variáveis aleatórias é a soma das esperanças dessas variáveis

$$X \text{ e } Y \text{ variáveis aleatórias} \Rightarrow E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- ▶ A variância de uma soma de duas variáveis aleatórias independentes é a soma da variância dessas variáveis

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

- ▶ Sendo que duas variáveis aleatórias são independentes \Leftrightarrow

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Distribuição Hipergeométrica

- ▶ População dividida em duas características
- ▶ Extrações casuais sem reposição
- ▶ Detalhes:
 - ▶ N objetos
 - ▶ r têm a característica A
 - ▶ $N - r$ têm a característica B
 - ▶ um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, dentre os N possíveis, sem reposição
- ▶ Objetivo: calcular a probabilidade de que este grupo de n elementos contenha x elementos com a característica A

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

Distribuição Hipergeométrica

- ▶ Modelo Geral:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

onde $0 \leq x \leq \min\{r, n\}$

- ▶ X registra o número de elementos dentre os n sorteados, que possuem a característica A
- ▶ X tem distribuição Hipergeométrica

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

Distribuição Hipergeométrica

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Notação: $X \sim Hip(N, n, r)$
- ▶ Se X tem distribuição Hipergeométrica com parâmetros N, n, r , então:
 - ▶ $E(X) = \frac{nr}{N}$
 - ▶ $Var(X) = \frac{nr}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)}$

Distribuição Hipergeométrica

► Aplicação: Controle de Qualidade

Suponha um lote com $N = 100$ elementos a ser analisado.

São escolhidas $n = 5$ peças sem reposição. Sabendo que neste lote de 100 elementos, $r = 10$ são defeituosos, a probabilidade de não se obter nenhuma peça defeituosa na amostra retirada é:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0} \binom{100 - 10}{5 - 0}}{\binom{100}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0.584$$

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

Distribuição Hipergeométrica

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ A probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa é:

$$\sum_{i=1}^5 P(X = i) = 1 - P(X = 0) \approx 0.416$$

- ▶ $E(X) = \frac{nr}{N} = \frac{5 \times 10}{100} = 0.5$
- ▶ $Var(X) = \frac{nr}{N} \left(1 - \frac{r}{N}\right) \frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{5 \times 10}{100} \left(1 - \frac{10}{100}\right) \frac{(100-5)}{(100-1)} \approx 0.432$

Distribuição de Poisson

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Considerando a distribuição $Bin(n, p)$, quando temos grandes valores para n e p pequeno, podemos usar a seguinte aproximação para a probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-np} (np)^x}{x!}$$

$$\forall x = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ Geralmente considera-se o critério $np \leq 7$ para usar essa aproximação

Distribuição de Poisson

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

- ▶ Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \forall x = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$
- ▶ λ é chamada de taxa de ocorrência
- ▶ Notação: $X \sim P(\lambda)$

Distribuição de Poisson

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

▶ Exemplo: $X \sim Bin(100, 0.065)$, deseja-se obter $P(X = 10)$

▶ $\lambda = np = 100 \times 0.065 = 6.5 \leq 7$

▶ no modelo Binomial:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} (0.065)^{10} (0.935)^{100-10} = 0.055$$

▶ no modelo Poisson: $P(X = 10) = \frac{e^{-6.5}(6.5)^{10}}{10!} \approx 0.056$

Distribuição de Poisson

- ▶ Exemplo: A emissão de partículas radioativas tem sido modelada através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada.

Supondo que o número de partículas alfa emitidas por minuto é uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro $\lambda = 5$, ou seja, a taxa de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto. Estamos interessados em calcular a probabilidade de haver mais de duas emissões por minuto.

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

Distribuição de Poisson

Uniforme

Bernoulli

Binomial

Propriedades

Hipergeométrica

Poisson

▶ $X \sim P(5)$

▶ $P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-5}5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^2 \frac{e^{-5}5^x}{x!} \approx 0.875$

▶ $E(X) = \lambda = 5$

▶ $Var(X) = \lambda = 5$