Tópico: Variáveis Aleatórias

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

Variáveis Aleatórias Discretas

- Variável que assume valores em um conjunto enumerável $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$
- Exemplo: Número de filhos - Com dados do último censo, a assistente social de um censo de saúde constatou que para as famílias da região:
  - 20% não têm filhos
  - 30% têm 1 filho
  - 35% têm 2 filhos
  - 15% têm igualmente 3, 4 ou 5 filhos

Variáveis Aleatórias Discretas

- Interesse: Estudo da variável $N =$ número de filhos
- Suponha que uma família será selecionada aleatoriamente nessa região e o número de filhos averiguado, qual seria o comportamento esperado dessa família em relação a N ?
- N pode assumir os valores em $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $P(N = 0) = 0.2$
  - $P(N = 1) = 0.3$
  - $P(N = 2) = 0.35$
  - $P(N = 3) = P(N = 4) = P(N = 5) = \frac{0.15}{3} = 0.05$

Variáveis Aleatórias Discretas

- Finalmente, determinamos uma "função de probabilidades" para N:

N	0	1	2	3	4	5
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
p_i	0.20	0.30	0.35	0.05	0.05	0.05

- Tal que $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$

Função Discreta de Probabilidade

- Função que atribui a cada valor da variável discreta X sua probabilidade
- $P(X = x_i) = p_i$, em que X assume os valores em $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$
- $0 \leq p_i \leq 1$
- $\sum_i p_i = 1$

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	p_3	$\ldots$

Exemplos

- Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade, e para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no rítmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos, na resistência do subsolo. Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra.
  - com base em avaliações geológicas, admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0.1 para cada 5 metros
  - o custo básico inicial é de 100 UPCs (Unidades Padrão de Construção) e será acrescido de 50k, com k representando o número de alterações observadas

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

Exemplos

- Como se comporta a variável Custo de Obra de fundações?
- Assumimos que as alterações ocorrem independentemente entre cada um dos três intervalos de 5 metros
- $A =$ ocorrência de alterações em cada intervalo
- 3 etapas $\Rightarrow 2^3 = 8$ possibilidades

Exemplos

Evento	Probabilidade	Custo
AAA	$(0.1)^3 = 0.001$	250
AAA^C	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
AA^CA	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
AA^CA^C	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
A^CAA	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
A^CAA^C	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
A^CA^CA	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
$A^CA^CA^C$	$(0.9)^3 = 0.729$	100

Exemplos

- Note que associamos a cada evento do espaço amostral um valor da variável C (custo), e eventos diferentes podem corresponder ao mesmo valor de C.
- $c_1 = 100, \ c_2 = 150, \ c_3 = 200, \ c_4 = 250$
  - $P\left(C = c_1\right) = P\left(A^C A^C A^C\right) = 0.729$
  - $P\left(C = c_2\right) = P\left(AA^C A^C \cup A^C AA^C \cup A^C A^C A\right) = 3 \times 0.081 = 0.243$
  - $P\left(C = c_3\right) = P\left(AAA^C \cup AA^C A \cup A^C AA\right) = 3 \times 0.009 = 0.027$
  - $P\left(C = c_4\right) = P\left(AAA\right) = 0.001$

Exemplos

C	100	150	200	250
p_i	0.729	0.243	0.027	0.001

- O comportamento de C, estudado através da probabilidade de ocorrência, pode auxiliar na previsão de gastos e na elaboração de orçamentos

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

Exemplos

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

- Uma moeda é lançada duas vezes
- N = número de caras em dois lançamentos
- $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$, em que C = cara e X =coroa

N	0	1	2
p_i	$P(XX) = \frac{1}{4}$	$P(CX \cup XC) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$P(CC) = \frac{1}{4}$

Função de Distribuição Acumulada

- Um grupo de 1000 crianças foi analisado para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. As crianças recebiam uma dose de vacina e após um mês passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose. Ao fim de 5 doses, foram consideradas imunizadas.
- Variável de interesse: $X =$ número de doses

Doses (X)	1	2	3	4	5
Freq.	245	288	256	145	66

Função de Distribuição Acumulada

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

- Uma criança é sorteada ao acaso, qual será a probabilidade dela ter recebido 2 doses?

  $P(X=2)=\frac{288}{1000}=0.288$

Doses (X)	1	2	3	4	5
p_i	0.245	0.288	0.256	0.145	0.066

- Qual a probabilidade da criança ter recebido até duas doses?

  $P(X\leq 2)=P(X=1)+P(X=2)=0.245+0.288=0.533$

Função de Distribuição Acumulada

- Em geral, a função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável discreta X é definida por $F(x) = P(X \leq x)$
- Assim, se X assume os valores em $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$:

$$F(x_1) = P(X = x_1)$$

$$F(x_2) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$$

$$\vdots$$

$$F(x_n) = P(X = x_1) + ... + P(X = x_n)$$

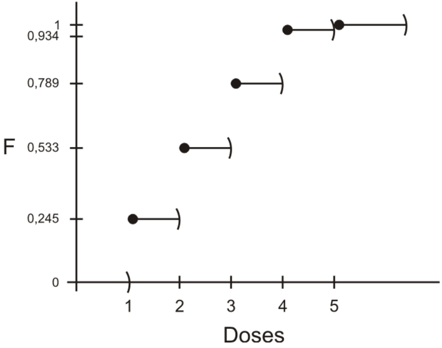
Função de Distribuição Acumulada

- Retomando o exemplo das vacinas, notemos que a f.d.a. de X = número de doses é definido para qualquer valor real x, logo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.245, & 1 \leq x < 2 \\ 0.533, & 2 \leq x < 3 \\ 0.789, & 3 \leq x < 4 \\ 0.934, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

Função de Distribuição Acumulada

- f.d.a. de X = número de doses:



Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- A média, valor esperado ou esperança de uma variável aleatória discreta X, cuja f.d.p. é dada por $P(X = x_i) = p_i$ é dada pela expressão:

  $\mu_X = E(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$
- A mediana (Md) é o valor médio que satisfaz

  $P(X \geq Md) \geq \frac{1}{2}$ e $P(X \leq Md) \geq \frac{1}{2}$
- A moda (Mo) é o valor da variável X que tem maior probabilidade de ocorrência:

  $P(X = Mo) = max\{p_1, p_2, ...\}$

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

- Exemplo:

X	-5	10	15	20
p_i	0.3	0.2	0.4	0.1

  - $\mu_X = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$
  - $Mo(X) = 15$
  - $P(X \leq 10) = P(X \geq 15) = 0.5$, então a mediana $Md(X) = \frac{10+15}{2} = 12.5$
  - Obs: note que nem a média (8.5) nem a mediana (12.5) são valores assumidos pela variávels X.

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

- Propriedade relevante das medidas de posição. Exemplo:

X	2	5	8	15	20
p_i	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

  - $\mu_X = 10.3$
  - $Mo(X) = 5$
  - $Md(X) = 8$

Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- Exemplo: Seja $Y = 5X - 10$

Y	0	15	30	65	90
p_i	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

  - $\mu_Y = 41.5$
  - $Mo(Y) = 15$
  - $Md(Y) = 30$
  - Note que, como $Y = 5X - 10$:

    $\mu_Y = 5\mu_X - 10$

    $Mo(Y) = 5Mo(X) - 10$

    $Md(Y) = 5Md(X) - 10$

Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

- Seja uma variável aleatória discreta X, cuja f.d.p. é dada por $P(X = x_i) = p_i$ e média μ_X, a variância é a ponderação pelas respectivas probabilidades, dos desvios relativos à média elevados ao quadrado:
  $\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_{i \geq 1} (x_i - \mu_X)^2 p_i$
- Extraindo a raiz quadrada da variância, obtemos o desvio padrão, representado por σ_X

Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

Profa. Verónica González-López, IMECC/UNICAMP

- Exemplo:

X	2	5	8	15	20
p_i	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

  - $\mu_X = 10.3$
  - $\sigma_X^2 = 39.61$
  - $\sigma_X = 6.294$