Tópico: Probabilidade

Probabilidades

- Distribuição de Frequências
  - Observadas: estudado até o momento
  - Modelo teórico: proposto pelo pesquisador para representar a distribuição de frequência dos dados antes de ser observada

Probabilidades

- Exemplo: estudar as proporções de ocorrência das faces de um dado.
  - Procedimento empírico: lançar o dado um certo número n de vezes e contar o número de n_i de vezes que a face $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ocorre

    $f_i = \frac{n_i}{n}$ é a distribuição empírica das frequências.

    Para diferentes oportunidades que esse experimento for realizado, a distribuição de frequência terá resultados diferentes, no entanto, espera-se que esses resultados verifiquem certas condições de regularidade.
  - Procedimento teórico: construir a distribuição de frequências através de suposições teóricas.

Probabilidades

- Suposições:
  - só podem ocorrer 6 faces $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - o dado é perfeitamente equilibrado
  - então, cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes, ou seja $f_i = \frac{1}{6}$

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Freq. Teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Probabilidades

Todo fenômeno aleatório terá seu modelo probabilístico especificado no momento que estabelecemos:

- Espaço Amostral: todos os resultados possíveis do experimento, denotado por $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$ (Ω terá essa forma quando for possível enumerar os possíveis resultados)
- Probabilidade: $P(\omega)$, para cada "ponto amostral" denotado por ω

Probabilidades

- Exemplo: lançar uma moeda duas vezes.

  $C = cara$

  $X = coroa$

  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

    $\omega_1 = (C, C)$; $\omega_2 = (C, X)$; $\omega_3 = (X, C)$; $\omega_4 = (X, X)$
  - considerando que a moeda é honesta: $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4$
  - seja o evento $A = \{\omega_1, \omega_4\}$ = obter duas faces iguais

    $P(A) = P(\{\omega_1, \omega_4\}) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Probabilidades

Como pode-se observar, através das probabilidades pontuais, é possível calcular a probabilidade de ocorrência de eventos (como o evento A exemplificado) que incluem a ocorrência de vários pontos amostrais.

- Retomando o exemplo do dado:
  - $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
    em que $\omega_i =$ face i, $\forall\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$
  - seja o evento $A = \{\text{a face é um número par}\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \{2, 4, 6\}$
    $P(A) = P(\{2\}, \{4\}, \{6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Probabilidades

- Exemplo: uma lâmpada é retirada de um lote e é medido seu tempo de vida antes de queimar.
  - $\Omega = \{t : \ t \geq 0\}$, ou seja, o espaço amostral são todos os números reais positivos
  - $A = \{t : \ 0 \leq t \leq 20\}$, o evento A ilustra uma limitação no tempo de vida, "o tempo de vida é menor ou igual a 20 horas"

    A é um evento (ou conjunto) que pode ser considerado como subconjunto de Ω
  - Esse tipo de espaço amostral é chamado de "espaço amostral contínuo"
  - Os espaços amostrais apresentados nos exemplos anteriores são chamados de "espaço amostral discreto"

Propriedades: Modelo Teórico

- (Ω, P):
  - Ω é o espaço amostral
  - P é probabilidade em Ω
  - Seja A é um evento em Ω
  - $\varnothing$ é um conjunto vazio ou evento impossível
- Propriedades:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall$ evento A em Ω
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(\varnothing) = 0$

Propriedades: Modelo Teórico

- Exemplo: representando uma possível divisão de alunos matriculados em determinado instituto de matemática, num certo ano:

	Masculino (Ma)	Feminino (Fe)	Total
Mat. Pura (M)	70	40	110
Mat. Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Propriedades: Modelo Teórico

- Escolhendo um aluno ao acaso, definem-se os seguintes eventos:
  - M: estudante da Matemática Pura
  - A: estudante da Matemática Aplicada
  - E: estudante da Estatística
  - C: estudante da Computação
  - Ma: sexo Masculino
  - Fe: sexo Feminino

Propriedades: Modelo Teórico

- Assim,
  - $P(M) = \frac{110}{200} = 0.550$
  - $P(A) = \frac{30}{200} = 0.150$
  - $P(E) = \frac{30}{200} = 0.150$
  - $P(C) = \frac{30}{200} = 0.150$
  - $P(Ma) = \frac{115}{200} = 0.575$
  - $P(Fe) = \frac{85}{200} = 0.425$

Interseção de Eventos

- Utilizando o último exemplo, vamos definir como evento (I), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística do sexo masculino, simultâneamente.
- $I = E \cap Ma$, o evento I é uma interseção dos eventos E e Ma.
- $P(E \cap Ma) = \frac{10}{200} = 0.05$

União de Eventos

- Definimos agora como evento (U), escolher ao acaso um aluno e ele ser estudante de estatística ou sexo masculino.
- $U = E \cup Ma$, o evento U é uma união dos eventos E e Ma.
- $P(E \cup Ma) = P(E) + P(Ma) - P(E \cap Ma)$

  $P(E) = \frac{10+20}{200} = 0.150$

  $P(Ma) = \frac{70+15+10+20}{200} = 0.575$

  $P(E \cap MA) = \frac{10}{200} = 0.050$

  Então: $P(E \cup Ma) = 0.150 + 0.575 - 0.050 = 0.675$

União de Eventos

- No caso de eventos mutuamente exclusivos ou disjuntos, a interseção é vazia ($\varnothing$).
- $P(M \cap C) = P(\varnothing) = 0$
- Assim:

  $$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = P(M) + P(C) = \frac{140}{200} = 0.700$$

Evento Complementar

Vamos considerar agora apenas o curso em que o aluno está matriculado.

Então, os eventos M e $\{A \cup E \cup C\}$ são chamados eventos complementares:

- $\{M \cap \{A \cup E \cup C\}\} = \varnothing$
- $\{M \cup \{A \cup E \cup C\}\} = \Omega$

Evento Complementar

No caso geral, sejam A e B subconjuntos de Ω:

- $A \cap B$ = evento em que A e B ocorrem simultâneamente
- $A \cup B$ = evento em que A ou B ocorrem
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- se $\{A \cap B\} = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A e B são complementares se $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$
    - como $P(A) + P(B) = 1$, então $P(B) = 1 - P(A)$
    - B é denotado por $B = A^C$

Equiprobabilidade

- $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ finito
- $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n$
- $A = \{\omega_{A1}, ..., \omega_{Am}\}$ evento em Ω com $m \leq n$ pontos amostrais
- então $P(A) = \frac{m}{n}$

Equiprobabilidade

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada uma vez.
  - $\Omega = \{C, X\}$
  - $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$
  - $A = \{C\}$
  - então $P(A) = \frac{1}{2}$

Equiprobabilidade

- Exemplo: uma moeda honesta é lançada duas vezes.
    - $\Omega = \{(C, C), (X, C), (C, X), (X, X)\}$
    - $P(C, C) = P(X, C) = P(C, X) = P(X, X) = \frac{1}{4}$
    - $A = \{(X, X), (C, C)\}$
    - então $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$