Tópico: Testes de Hipóteses

# Teste de Hipótese

- Motivação: Um medicamento que existe na indústria farmacêutica produz o efeito desejado em 60% dos casos em que é aplicado. Com o objetivo de incrementar essa porcentagem, o laboratório lança um novo medicamento elaborado com técnicas avançadas e afirma: "O novo medicamento é melhor que o já existente"

# Teste de Hipótese

- Se o novo medicamento produz o efeito desejado em 90% dos casos (em uma amostra) nos quais foi utilizado:
    - a afirmação do laboratório tem fundamento?
    - para decidir se a afirmação tem fundamento, baseamos nosso estudo na informação contida numa amostra aleatória de usuários do produto.
    - vamos supor que o medicamento novo não pode ser pior que o já existente.

# Teste de Hipótese

- Decisão: Estratégia de Decisão
  - Seja $\theta$ o parâmetro ou a quantidade de interesse, $\theta$ permite fazer alguma inferência relativa ao problema
  - $\theta \in \omega$ (espaço paramétrico)
  - Suponha que $\omega \doteq \omega_1 \cup \omega_2$ (união disjunta)
  - Teste: $H_0 : \theta \in \omega_1 \quad vs \quad H_1 : \theta \in \omega_2$

# Teste de Hipótese

- Convenção:
  - $H_0$: hipótese nula; a afirmação referida ao possível valor de $\theta$, contra a qual procuramos evidência.
  - $H_1$: hipótese alternativa; a afirmação referida ao possível valor de $\theta$, que intuímos seja verdadeira.

# Teste de Hipótese

- No exemplo de motivação: $H_0 : \theta = 0.6 \quad vs \quad H_1 : \theta = 0.9$
- Definimos o conjunto de decisões $A = \{a : a = a_1 \text{ ou } a = a_2\}$:
  - $a_1 =$ aceitar $H_0$ (e rejeitar $H_1$)
  - $a_2 =$ rejeitar $H_0$ (e aceitar $H_1$)
  - a ($= a_1$ ou $= a_2$) será a decisão tomada a partir da observação da amostra.

# Regra de Decisão

- A amostra $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ pertence ao espaço amostral $S$
- $S$ pode ser colocado como $S = S_1 \cup S_2$ de forma que $\mathbf{X} \in S_1$ ou $\mathbf{X} \in S_2$
- Regra:
    - se $\mathbf{X} \in S_1$, então $a = a_1$ (aceita $H_0$)
    - se $\mathbf{X} \in S_2$, então $a = a_2$ (rejeita $H_0$)

# Regra de Decisão

- Exemplo: Seja $X$ uma observação proveniente da Normal $N(\mu, 1)$
  - $\mu$ desconhecida
  - Teste: $H_0 : \theta = 0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq 0$
    - se $X > \frac{1}{2}$ ou $X < -\frac{1}{2}$, então $a = a_2$ (rejeita $H_0$)
    - se $X \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, então $a = a_1$ (aceita $H_0$)
  - $S_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ é chamada região de rejeição de $H_0$, ou região crítica do teste.

# Risco de Decisão

- Erro tipo I $= \{\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}\}$
- Erro tipo II $= \{\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}\}$

| | $a_1$ (aceitar $H_0$) | $a_2$ (rejeitar $H_0$) |
|---|---|---|
| $H_0$ verdadeira | — | erro tipo I |
| $H_0$ falsa | erro tipo II | — |

# Risco de Decisão

- Erros no exemplo de motivação:

  $H_0 : \theta = 0.6 \quad vs \quad H_1 : \theta = 0.9$

  - Erro tipo I $=$ {rejeitar $H_0 | H_0$ é verdadeira} $= \{\theta = 0.9 | \theta = 0.6\}$
  - Erro tipo II $=$ {aceitar $H_0 | H_0$ é falsa} $= \{\theta = 0.6 | \theta = 0.9\}$

- Deseja-se controlar $P$(erro tipo I) e $P$(erro tipo II)

# Risco de Decisão

- Montando o teste no exemplo de motivação:

  $H_0 : \theta = 0.6 \quad vs \quad H_1 : \theta = 0.9$

- Seja $X$ =número de pacientes para os quais o novo medicamento produz o efeito desejado

- $n = 10$ o tamanho da amostra

- $X \sim Bin(10, \theta)$

# Risco de Decisão

- Se $H_0$ é verdadeira: $X \sim Bin(10, 0.6)$; $E(X) = 6$
- Se $H_0$ é falsa: $X \sim Bin(10, 0.9)$; $E(X) = 9$
- Vamos considerar a seguinte região de rejeição: $S_2 = \{8, 9, 10\}$
- Lembrando que $X$ pode assumir os valores $0, 1, 2, ..., 10$
- A região crítica $S_2$ determina as probabilidades de cometer os erros tipo I e II.

# Risco de Decisão

$$
\begin{aligned}
P(\text{erro tipo I}) &= P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) \\
&= P(X \in S_2 | \theta = 0.6) \\
&= P(8 \leq X \leq 10 | \theta = 0.6) \\
&= \sum_{x=8}^{10} P(X = x | \theta = 0.6) \\
&\approx 0.1672
\end{aligned}
$$

# Risco de Decisão

$$
\begin{aligned}
P(\text{erro tipo II}) &= P(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) \\
&= P(0 \leq X \leq 7 | \theta = 0.9) \\
&= \sum_{x=0}^{7} P(X = x | \theta = 0.9) \\
&\approx 0.0702
\end{aligned}
$$

# Risco de Decisão

- Observando a relação entre os erros tipo I e II, e $S_2$:

$$H_0 : \theta = 0.6 \quad vs \quad H_1 : \theta = 0.9$$

| $S_2$ | P(erro tipo I) | P(erro tipo II) |
|---|---|---|
| $\{8, 9, 10\}$ | 0.1672 | 0.0702 |
| $\{9, 10\}$ | 0.0463 | 0.2639 |
| $\{10\}$ | 0.0060 | 0.6513 |

# Risco de Decisão

- À medida que procuramos diminuir a probabilidade de cometer erro tipo I, diminuímos a região $S_2$, aumentando a probabilidade de cometer erro tipo II.
- Optamos então por controlar o erro tipo I (considerado mais grave).