

Tópico: Estatísticas

Estatística

- Uma estatística é uma característica da amostra. Ou seja, se X_1, \dots, X_n é uma amostra, $T = \text{função}(X_1, \dots, X_n)$ é uma estatística.
- Exemplos
 - $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ (média amostral)
 - $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ (mínimo da amostra)
 - $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ (máximo da amostra)
 - $X_{(i)}$ é o i -ésimo valor da amostra ordenada
- Note que uma estatística é uma função que em uma determinada amostra, assume um valor determinado.

Estatística

- Para que serve uma estatística? Para "estimar" os valores de uma distribuição, ou características de uma população.
- População:
 - média $_P$
 - variância $_P$
- Amostra:
 - média $_A = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ "estima" a média $_P$
 - variância $_A = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \text{média}_A)^2}{n}$ "estima" a variância $_P$

Estatística

- Exemplo de uso de uma estatística para estimar uma quantidade de interesse:
Seja θ a proporção na cidade de Campinas de consumidores de um determinado produto.
 - planejamento de experimento: planeja-se obter uma amostra casual simples de tamanho $n = 100$, sem reposição.
 - cada X_i , $i = 1, \dots, 100$, vai assumir o valor 1 se a pessoa i consome o produto, e 0 se não.
 - estatística: $T = \frac{X_1 + \dots + X_{100}}{100}$
 - experimento: uma vez que o experimento foi implementado, T assume um valor t_0 , que estima θ , ou seja, $\hat{\theta} = t_0$

Parâmetros

- Cada quantidade de interesse (como θ no exemplo anterior) é chamado de parâmetro da população.
- Para apresentar uma estimativa de um parâmetro (como $\hat{\theta}$), devemos escolher uma estatística (Como T).
- Note que da maneira que o experimento é planejado, a estatística T é uma variável aleatória, uma vez que o experimento pode dar resultados diversos, se repetido diversas vezes.
- Portanto, a estatística T (não necessariamente $T = \frac{X_1 + \dots + X_{100}}{100}$) possui uma distribuição, que será a **distribuição amostral de T** .

Aplicação e Exemplos de Distribuição Amostral

- Planejamento: pretendemos avaliar a honestidade de uma moeda. Para isso, planeja-se lançar uma moeda 50 vezes, sendo cada lançamento independente dos demais. Definimos:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{quando cara} \\ 0, & \text{quando coroa} \end{cases}$$

- Assim, a variável $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ é o número de caras nos 50 lançamentos
- Y é uma v.a. que pode assumir os valores $\{0, 1, 2, \dots, 50\}$

Aplicação e Exemplos de Distribuição Amostral

- $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i \sim B(50, p)$, pois é uma soma de bernoullis
- $p = P(X_i = 1) = P(\text{obter cara})$
- Y é a estatística usada para avaliar a honestidade da moeda
- se a moeda for honesta $p = \frac{1}{2}$
- Definimos por fim $T = \frac{Y}{n}$, e a partir de T , estimamos p
- Supondo que foram observadas 30 caras nos 50 lançamentos,
 $T(\text{avaliado para essa amostra}) = \frac{30}{50} = 0.6 = \hat{p}$

Aplicação e Exemplos de Distribuição Amostral

- Qual a importância de saber a distribuição de Y ? Para avaliar se a ocorrência de 30 caras em 50 lançamentos nos traz evidências se a moeda é honesta ou não.
- Assumindo que a moeda é honesta, dado $p = \frac{1}{2}$:

$$P(Y = 30 | n = 50, p = 0.5) = \binom{50}{30} (0.5)^{30} (0.5)^{20} = 0.042$$

- Então $P(Y \geq 30 | n = 50, p = 0.5) = 0.08$

Aplicação e Exemplos de Distribuição Amostral

- Assim, se a moeda fosse honesta, a probabilidade de ocorrer mais de 30 caras em 50 lançamentos é de aproximadamente 0.08.
- Essa probabilidade é evidência suficiente contra a honestidade da moeda?

Distribuição Amostral

- **Resultado:** Seja X uma v.a. com média μ e variância σ^2 . Seja X_1, \dots, X_n uma amostra casual simples de X .
 - $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$
 - $E(\bar{X}_n) = \mu$
 - $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$
- Exemplo: X_1, X_2, X_3 ensaios $ber(0.3)$ independentes
 - $E(X_i) = 0.3 \Rightarrow E(\bar{X}_3) = 0.3$
 - $Var(X_i) = 0.3(0.7) = 0.21 \Rightarrow Var(\bar{X}_3) = \frac{0.21}{3} = 0.07$

Teorema Central do Limite

- **Resultado (T.C.L.):** Para amostras casuais simples X_1, \dots, X_n colhidas de uma população com média μ e variância σ^2 , a distribuição amostral de \bar{X}_n aproxima-se de uma distribuição Normal de média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, quando n for suficientemente grande.

Teorema Central do Limite

- Exemplo: X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória

- $\exp(2)$: $f_{X_i}(x) = 2e^{-2x}\mathbb{I}_{(x>0)}$

- $E(X_i) = \frac{1}{2}$

- $Var(X_i) = \frac{1}{4}$

Suponha que X_i modela o tempo de vida de um transistor em horas. Os tempos de 100 transistores são coletados. Desejamos estudar a variável aleatória \bar{X}_{100} , e pelo T.C.L., temos que:

- $E(\bar{X}_{100}) = \frac{1}{2}$

- $Var(\bar{X}_{100}) = \frac{1/4}{100} = \frac{1}{400}$

- $\bar{X}_n \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{400}\right)$

Teorema Central do Limite

- **Resultado do T.C.L.:** Se X_1, \dots, X_n é uma amostra casual simples com média μ e variância σ^2 , e definimos $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, quando n for suficientemente grande:

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

- Retomando o exemplo dos transistores: $\frac{\bar{X}_{100} - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}} \sim N(0, 1)$

Teorema Central do Limite

- Utilidade do Resultado:

$$\begin{aligned}P(\bar{X}_{100} \leq x) &= P\left(\frac{\bar{X}_{100} - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}} \leq \frac{x - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}}\right) \\ &= P(Z \leq 10(2x - 1))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\bar{X}_{100} \geq x) &= 1 - P(\bar{X}_{100} \leq x) \\ &= 1 - P\left(\frac{\bar{X}_{100} - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}} \leq \frac{x - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}}\right) \\ &= 1 - P(Z \leq 10(2x - 1))\end{aligned}$$