DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Obs:
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$Var = \sigma^2$
$DP = \sigma$

1) Se $X \sim N(10,4)$, calcular:

a) $P(8 < X < 10)$
b) $P(9 \leq X \leq 12)$
c) $P(X > 10)$
d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$

Para calcular as probabilidades, é necessário integração numérica – e^{-x^2} não tem antiderivada. Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ encontram-se tabelados. Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável em $N(0,1)$.

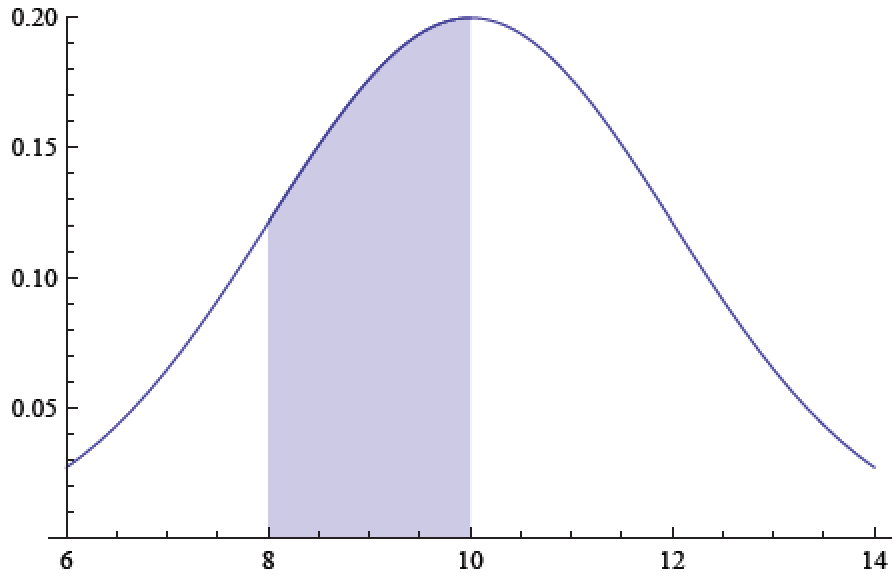
Recorde que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ e $(X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$. Neste problema, sabemos que $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 4$, logo $\sigma = 2$. Então $(X - 10)/2 \sim N(0,1)$.

(a) Devemos transformar X de modo que o evento $8 < X < 10$ permaneça inalterado. Fazemos isso transformando todos os lados da inequação:
$8 < X < 10 \Leftrightarrow 8-10 < X-10 < 10-10 \Leftrightarrow -2 < X-10 < 0$
$\Leftrightarrow -2/2 < (X-10)/2 < 0/2 \Leftrightarrow -1 < Z < 0.$

Portanto $P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0) = 0{,}3413$

(b) $P(9 \leq X \leq 12) = P(9 - 10 \leq X - 10 \leq 12 - 10) =$
$P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0{,}5328$

(a) O gráfico da curva normal, com a região correspondente ao item (a) em destaque:



(c) $P(X > 10) = P(Z > 0) = 0{,}5$

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = P(X < 8) + P(X > 11)$, pois $\{X < 8\} \cap \{X > 11\} = \emptyset$.

$P(X < 8) = P(Z < -1) = 0{,}1586$ e
$P(X > 11) = P(Z > 1/2) = 0{,}3085$, logo
$P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = 0{,}4671$

2) O peso bruto de latas de conserva é uma v.a. normal, com média 1.000g e desvio padrão 20g.

(a) Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de 980g?

(b) Qual a probabilidade de uma lata pesar mais de 1.010g?

Seja X a variável aleatória "peso da lata de conserva". Basta traduzir os enunciados em seus eventos e padronizar para consultar a tabela da Normal, isto é:

(a) $P(X < 980) = P(Z < [980 - 1000]/20) = P(Z < -1)$

(b) $P(X > 1010) = P(Z > [1010 - 1000]/20) = P(Z > 0{,}5)$

3) As vendas de um determinado produto tem **distribuição aproximadamente normal**, com **média 500** unidades e **desvio padrão 50** unidades.

Se a empresa decide fabricar **600** unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada?

Seja X o número de peças fabricadas num mês. $X \sim N(500, 50^2)$. A probabilidade da produção se esgotar antes do final do mês é dada por $P(X < 600)$.

Padronizando X, obtemos $P(X < 600) = P(Z < [600 - 500]/50)$ $= P(Z < 2)$. Consultando a tabela, vemos que a probabilidade de não atender todos os pedidos do mês, isto é, de não produzir as 600 peças é de 97,72%.

Exercício - Seção 7

12 Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

a)$P(X \leq \mu + 2\sigma)$

b)$P(|X - \mu| \leq \sigma)$

c)o número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0.99$

d)o número a tal que $P(X > a) = 0.90$.

Por simplicidade assuma primeiramente que $\mu = 1$ e $\sigma = \sqrt{2}$. Logo, determine as quantidades requeridas para μ e σ geral.

De modo análogo ao exercício anterior, queremos transformar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em $Z \sim N(0,1)$.

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(X - \mu \leq 2\sigma) = P((X-\mu)/\sigma \leq 2) = P(Z \leq 2) = 0{,}9772$

(b) $P(|X-\mu| \leq \sigma) = P(|X-\mu|/\sigma \leq 1) = P(|(X-\mu)/\sigma| \leq 1) = P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0{,}6827$

(c) Note que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = P(-a \leq (X-\mu)/\sigma \leq a) = P(-a \leq Z \leq a)$. Como X é simétrica, então sabemos que $2P(Z > a) = 2P(Z < -a) = 1 - P(-a \leq Z \leq a)$. Basta então olhar qual a satisfaz $P(Z > a) = 0{,}005$. Consultando a tabela, vemos que $a = 2,5758$.

(d) Note agora que $P(X > b) = P(Z > (b-\mu)/\sigma)$. Consultando a tabela, vemos que $P(Z > (b-\mu)/\sigma) = 0{,}9$ se $(b-\mu)/\sigma = 1{,}2816$, ou $b = 1{,}2816\sigma + \mu$.

Referências

[1] Lista de exercícios seleção feita pela profa. Verónica González-López, com a contribuição do prof. Mario Gneri, Márcio Lanfredi Viola e Diego Bernardini - IMECC Unicamp .

Morettin & Bussab, Estatística Básica. 5ª edição.