

Seção 7 – Exercício 2

Seja X a v.a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} .$$

- a) Determinar o valor k .
- b) Calcular $E(X)$, $Var(X)$.
- c) Determine a f.d.a. de X .

Solução...

A função densidade de probabilidade (fdp) deve satisfazer as seguintes condições:

$$a) f(x) \geq 0, x \in \mathfrak{R}_x$$

$$b) \int_{\mathfrak{R}_x} f(x)dx = 1$$

Distribuição uniforme

Seja $X \sim U$, com média 15 e variância $25/3$.

- a) Encontre a função de densidade de X .
- b) Qual é a probabilidade que $X > 14$?

(a) Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}$$

e sua variância por

$$\text{Var}(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

(a) (cont.) Temos o seguinte sistema, portanto:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 15 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 30 \\ (b - a)^2 = 100 \end{cases}$$

Ou simplesmente

$$\begin{cases} a + b = 30 \\ b - a = 10 \end{cases}$$

Que tem solução $a = 10$, $b = 20$, o que nos mostra que $X \sim U[10, 20]$ e $f(x) = \frac{1}{10}$ se $x \in [10, 20]$ e 0 caso contrário.

(b) A probabilidade de que $X > 14$ é dada por

$$P(X > 14) = \int_{14}^{20} \frac{1}{10} dx = \frac{(20 - 14)}{10} = 0.6$$

Exercício - Seção 7

- 3 O comprimento do lado de um quadrado aleatório é uma v.a. uniforme em $[0,5]$. Calcular a área esperada do quadrado.

Distribuição exponencial

O tempo médio que um consumidor gasta no supermercado é de 25 minutos. Qual é a probabilidade que um consumidor gaste mais de trinta minutos no supermercado?

A distribuição exponencial é a adequada para esse tipo de problema, visto que ela modela o tempo de chegada de algum evento. Sendo assim, temos que $X \sim \text{exp}(\lambda)$, e como $25 = \mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, então $\lambda = 1/25$. Logo

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{30}{25}}\right) = 0.3013$$

Exercício - Seção 7

6 O tempo de vida em horas X de um transistor é uma v.a. com função de densidade:

$$f(x) = 0 \text{ se } x < 0; \quad f(x) = 500^{-1}e^{-x/500} \text{ se } x \geq 0;$$

Calcule a função de distribuição acumulada, a média, variância, mediana e moda de X .

Calcule $P(\{X > x\})$ para todo x real.

Referências

¹Lista de exercícios seleção feita pela profa. Verónica González-López, com a contribuição do prof. Mario Gneri, Márcio Lanfredi Viola e Diego Bernardini - IMECC Unicamp .

2 Notas de Aula Rafael Tovar.