Aula de Exercícios - Testes de Aderência, Independência e Homogeneidade

Organização: Rafael Tovar *Digitação*: Guilherme Ludwig

Teste de Aderência

Exemplo

Um engenheiro de computação tem desenvolvido um algoritmo para gerar números aleatórios inteiros no intervalo 0-9. Ao executar o algoritmo e gerar 1000 valores, ele obtém observações com as seguintes frequências:

	O_i	E_i		O_i	E_i		O_i	E_i
0	94	100	4	101	100	8	99	100
1	93	100	5	104	100	9	108	100
2	112	100	6	95	100	10	94	100
3	101	100	7	100	100			

O gerador funciona? Isto é, ele gera valores com distribuição uniforme em $\{0, 1, \ldots, 9\}$?

Teste de Aderência

O experimento de geração obedece a uma distribuição Uniforme de modo que cada número tem probabilidade $1/10$. Portanto, a frequência esperada de cada número, em 1000 experimentos, é 100.

A estatística do teste é dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Teste de Aderência

Testes de aderência tem $k-1$ graus de liberdade, onde k é o número de caselas na tabela. Então devemos comparar a estatística com uma χ^2 com 9 graus de liberdade. O valor observado foi:

$$Q_0 = \frac{(94-100)^2}{100} + \frac{(93-100)^2}{100} + \ldots + \frac{(94-100)^2}{100} = 3.72$$

Consultando a tabela apropriada, temos que o valor de q tal que $P(\chi^2_9 > q) = 0.05$ é $q = 16.92$. Como o valor da estatística observada é menor que q, não podemos rejeitar a hipótese nula $\Rightarrow$ o gerador de números aleatórios funciona satisfatoriamente.

Teste de Aderência

Exemplo

O número de eosinófilos por campo de microscópio tenha distribuição Poisson(λ). Um biólogo toma 60 biópsias de tecido de indivíduos com Leishmaniose cutânea e avalia o número de eosinófilos por campo. A distribuição observada é a seguinte:

# eosinófilos	O_i
0	32
1	15
2	9
3	4

Teste a hipótese que a frequência de eosinófilos tem distibuição de Poisson, com $\lambda = 0.75$.

Teste de Aderência

Devemos construir a tabela de frequências esperadas, a partir das probabilidades sob H_0.

k	$P(X = k)$	$60 \cdot P(X = k) = E_i$	O_i
0	$e^{-0.75} = 0.472$	28.32	32
1	$e^{-0.75}0.75 = 0.354$	21.24	15
2	$e^{-0.75}0.75^2/2! = 0.133$	7.98	9
3	$e^{-0.75}0.75^3/3! = 0.033$	1.98	4
R	0.007	0.43	0

Note que R representa o evento de $X \geq 4$.

Teste de Aderência

Note que não devemos utilizar frequências esperadas menores que 3. Vamos agregar as células da tabela, obtendo:

k	$P(X = k)$	E_i	O_i
0	0.472	28.32	32
1	0.354	21.24	15
2^*	0.174	10.42	13

A estatística observada do teste é

$$Q_o = \frac{(32 - 28.32)^2}{28.32} + \frac{(15 - 21.24)^2}{21.24} + \frac{(13 - 10.42)^2}{10.42} = 2.95$$

Teste de Aderência

Temos 2 graus de liberdade na tabela, e o valor q tal que tenhamos 5% de probabilidade de uma χ^2 ser maior do que ele é $q = 5.991$. Como $Q_0 = 2.95 < 5.991$, não rejeitamos a hipótese de que os eosinófilos por campo ocorram com distribuição de Poisson com $\lambda = 0.75$.

Teste de Independência

Exemplo

Um inspetor de qualidade toma uma amostra de 220 artigos num centro de distribuição. Se sabe que cada produto pode vir de uma de três fábricas e pode ou não estar defeituoso. O inspetor avalia todos os produtos e obtém os seguintes resultados:

	F_1	F_2	F_3	
D	8	15	11	34
ND	62	67	57	186
	70	82	68	220

Ser defeituoso independe da fábrica?

Teste de Independência

A hipótese de independência dos eventos é dada por $H_0 : P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Obtemos a tabela esperada, sob a hipótese nula, calculando a probabilidade de cada casela:

$$E_{11} = \frac{70 \times 34}{220} = 10.810 \qquad E_{21} = \frac{70 \times 186}{220} = 59.180$$

$$E_{12} = \frac{82 \times 34}{220} = 12.673 \qquad E_{22} = \frac{82 \times 186}{220} = 69.327$$

$$E_{13} = \frac{68 \times 34}{220} = 10.509 \qquad E_{23} = \frac{68 \times 186}{220} = 57.490$$

Teste de Independência

A tabela esperada dos dados é simplesmente

	F_1	F_2	F_3	
D	10.81	12.67	10.51	34
ND	59.18	59.33	57.49	186
	70	82	68	220

Teste de Independência

A estatística observada do teste é:

$$Q_0 = \frac{(8 - 10.81)^2}{10.81} + \ldots + \frac{(57 - 57.49)^2}{57.49} = 1.398$$

Note que no teste de independência, temos $(r - 1)(s - 1)$ graus de liberdade, onde r e s são o número de linhas e de colunas. Então temos 2 graus de liberdade, e o *p-value* do teste é 0.497, ou seja, não rejeitamos a hipótese de independência entre o eventos "peça defeituosa" e "peça da fábrica i".

Teste de Homogeneidade

Exemplo

Suponha que o inspetor do exemplo anterior resolveu repetir o experimento, mas desta vez, ao invés de tomar 220 artigos ao acaso, resolveu colher uma amostra de exatamente 80 artigos selecionados ao acaso dentro de cada uma das três fábricas. Os dados colhidos foram:

	F_1	F_2	F_3	
D	8	15	11	34
ND	72	65	69	206
	80	80	80	240

Há diferença entre as fábricas na proporção de defeituosos?

Teste de Homogeneidade

A hipótese agora é $H_0 : P_1 = P_2 = P_3$, ou seja, cada fábrica tem a mesma população. Temos que as proporções de itens defeituosos são, respectivamente, $\hat{p}_1 = 8/80 = 0.1$, $\hat{p}_2 = 15/85 = 0.1875$ e $\hat{p}_3 = 0.1375$. As frequências esperadas são:

$$E_{11} = E_{12} = E_{13} = \frac{80 \times 34}{240} = 11.33$$

$$E_{21} = E_{22} = E_{23} = \frac{80 \times 206}{240} = 68.67$$

Teste de Homogeneidade

A estatística observada do teste é

$$Q_0 = \frac{(8-11.33)^2 + (15-11.33)^2 + (11-11.33)^2}{11.33} + \frac{(72-68.67)^2 + (65-68.67)^2 + (69-68.67)^2}{68.67}$$
$$= 0.978 + 1.188 + 0.009 + 0.161 + 0.196 + 0.001 = 2.537$$

O quantil da χ^2 com 2 graus de liberdade, tal que $P(Q > q) = 0.05$ sob a hipótese nula, é 5.991. Como $Q_0 = 2.537 < 5.991$, não rejeitamos a hipótese das populações serem iguais (isto é, a probabilidade de uma peça ser defeituosa é a mesma nas três fábricas).