Aula de Exercícios - Modelos Probabilísticos Contínuos

Organização: Airton Kist *Digitação*: Guilherme Ludwig

Modelo Uniforme

Exemplo

A temperatura T de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. Suponha que T seja considerada uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(150, 300)$. Suponha que o custo para produzir um galão de petróleo seja C_1 reais. Se o óleo for destilado a uma temperatura inferior a 200^o, o produto obtido é vendido a C_2 reais; se a temperatura for superior a 200^o, o produto é vendido a C_3 reais.

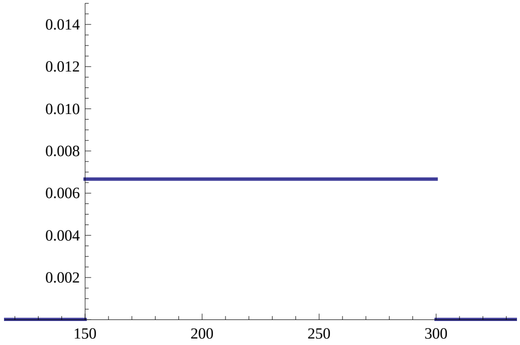
(a) Fazer o gráfico da f.d.p. de T.

(b) Qual o lucro médio por galão?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 182.

Modelo Uniforme

(a) O gráfico de $f(t)$ é dado por:



Modelo Uniforme

(b) Seja X o lucro obtido. Então $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|T < 200)P(T < 200) + \mathbb{E}(X|T \geq 200)P(T \geq 200)$

Note que $P(T < 200) = \int_{150}^{200} 1/(300 - 150)dt = 1/3$, e consequentemente $P(T \geq 200) = 2/3$. Repare também que $\mathbb{E}(X|T < 200) = C_2 - C_1$, pois o lucro é completamente determinado pela temperatura de destilação. De modo análogo, $\mathbb{E}(X|T \geq 200) = C_3 - C_1$. Temos portanto que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{C_2 - C_1}{3} + \frac{2(C_3 - C_1)}{3} = \frac{C_2 + 2C_3}{3} - C_1$$

Modelo Normal

Exemplo

Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

(a) $P(8 < X < 10)$

(b) $P(9 \leq X \leq 12)$

(c) $P(X > 10)$

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 182.

Modelo Normal

Para calcular as probabilidades, é necessário integração numérica – e^{-x^2} não tem antiderivada. Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ encontram-se tabelados. Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável em $N(0,1)$.

Recorde que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ e $(X - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$. Neste problema, sabemos que $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 4$, logo $\sigma = 2$. Então $(X - 10)/2 \sim N(0,1)$.

Modelo Normal

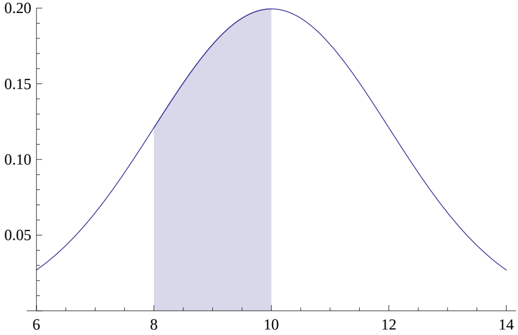
(a) Devemos transformar X de modo que o evento $8 < X < 10$ permaneça inalterado. Fazemos isso transformando todos os lados da inequação:
$8 < X < 10 \Leftrightarrow 8-10 < X-10 < 10-10 \Leftrightarrow -2 < X-10 < 0$
$\Leftrightarrow -2/2 < (X-10)/2 < 0/2 \Leftrightarrow -1 < Z < 0.$

Portanto $P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0) = 0{,}3413$

(b) $P(9 \leq X \leq 12) = P(9-10 \leq X-10 \leq 12-10) =$
$P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0{,}5328$

Modelo Normal

(a) O gráfico da curva normal, com a região correspondente ao item (a) em destaque:



Modelo Normal

(c) $P(X > 10) = P(Z > 0) = 0{,}5$

(d) $P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = P(X < 8) + P(X > 11)$, pois $\{X < 8\} \cap \{X > 11\} = \emptyset$.

$P(X < 8) = P(Z < -1) = 0{,}1586$ e
$P(X > 11) = P(Z > 1/2) = 0{,}3085$, logo
$P(X < 8 \text{ ou } X > 11) = 0{,}4671$

Modelo Normal

Exemplo

Para a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, encontre:

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

(c) O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0{,}99$

(d) O número b tal que $P(X > b) = 0{,}90$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 182.

Modelo Normal

De modo análogo ao exercício anterior, queremos transformar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em $Z \sim N(0, 1)$.

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(X - \mu \leq 2\sigma) = P((X - \mu)/\sigma \leq 2) = P(Z \leq 2) = 0{,}9772$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(|X - \mu|/\sigma \leq 1) = P(|(X - \mu)/\sigma| \leq 1) = P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0{,}6827$

Modelo Normal

(c) Note que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = P(-a \leq (X - \mu)/\sigma \leq a) = P(-a \leq Z \leq a)$. Como X é simétrica, então sabemos que $2P(Z > a) = 2P(Z < -a) = 1 - P(-a \leq Z \leq a)$. Basta então olhar qual a satisfaz $P(Z > a) = 0{,}005$. Consultando a tabela, vemos que $a = 2,5758$.

(d) Note agora que $P(X > b) = P(Z > (b - \mu)/\sigma)$. Consultando a tabela, vemos que $P(Z > (b - \mu)/\sigma) = 0{,}9$ se $(b - \mu)/\sigma = 1{,}2816$, ou $b = 1{,}2816\sigma + \mu$.

Modelo Normal

Exemplo

As alturas de 10.000 alunos de um colégio têm distribuição aproximadamente normal, com média $170cm$ e desvio padrão $5cm$.

(a) Qual o número esperado de alunos com altura superior a $165cm$?

(b) Qual o intervalo simétrico em torno da média que conterá 75% das alturas dos alunos?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 182.

Modelo Normal

(a) A proporção de alunos com altura superior a $165cm$ é dada por $P(X > 165)$, ou $P(Z > (165 - 170)/5) = P(Z > -1)$ $= 0{,}8413$. Logo, o número de alunos com mais de $1{,}65$ é uma variável aleatória com distribuição binomial$(10000, 0{,}8413)$ e, como sabemos, o número esperado é de 8413 alunos.

Modelo Normal

(b) Queremos $P(q_1 < X < q_2) = 0{,}75$. Transformando X em Z, temos que

$$P(q_1 < X < q_2) = P((q_1 - 170)/5 < Z < (q_2 - 170)/5)$$

Note agora que $P(-w < Z < w) = 0{,}75$ se, e somente se, $w = 1{,}1503$, então $(q_2 - 170)/5 = 1{,}1503 \Leftrightarrow q_2 = 175{,}75$ (e analogamente, $q_1 = 164{,}24$. Portanto, o intervalo simétrico que contém 75% das alturas é $(175{,}75, 164{,}24)$

Modelo Normal

Exemplo

As vendas de um determinado produto tem distribuição aproximadamente normal, com média 500 unidades e desvio padrão 50 unidades. Se a empresa decide fabricar 600 unidades no mês em estudo, qual é a probabilidade de que não possa atender a todos os pedidos desse mês, por estar com a produção esgotada? *Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 183.

Modelo Normal

Seja X o número de peças fabricadas num mês. $X \sim N(500, 50^2)$. A probabilidade da produção se esgotar antes do final do mês é dada por $P(X < 600)$.

Padronizando X, obtemos $P(X < 600) = P(Z < [600 - 500]/50)$ $= P(Z < 2)$. Consultando a tabela, vemos que a probabilidade de não atender todos os pedidos do mês, isto é, de não produzir as 600 peças é de 97,72%.

Modelo Normal

Exemplo

Suponha que as amplitudes de vida de dois aparelhos elétricos, D_1 e D_2, tenham distribuições $N(42, 36)$ e $N(45, 9)$, respectivamente. Se os aparelhos são feitos para ser usados por um período de 45 horas, qual aparelho deve ser preferido? E se for por um período de 49 horas?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 183.

Modelo Normal

(i) Para o caso de períodos de 45 horas, temos $P(D_1 > 45) = P(Z > [45 - 42]/6) = P(Z > 0.5) = 0{,}3085$, enquanto $P(D_2 > 45) = P(Z > [45 - 45]/3)$ $= P(Z > 0) = 0{,}5$. Note que a probabilidade do segundo aparelho durar mais que 45 horas é maior que a do primeiro e, portanto, ele é preferível.

(ii) Analogamente, $P(D_1 > 49) = P(Z > [49 - 42]/6) = P(Z > 1.1666) = 0{,}1216$, e $P(D_2 > 49) = P(Z > [49 - 45]/3) = P(Z > 1.3333) = 0{,}0912$. Neste cenário, é preferível o primeiro aparelho.

Modelo Exponencial

Exemplo

Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1.000 horas) que possa ser considerado uma v.a. contínua com f.d.p. $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0{,}9$. Qual o lucro esperado por item?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 183.

Modelo Exponencial

A probabilidade do item durar menos que 900 horas é dada por

$$P(X < 0{,}9) = \int_0^{0{,}9} e^{-x} dx = 0{,}5934$$

Temos portanto que o item será devolvido com essa probabilidade (implicando numa perda de \$2), ou permanecerá com o cliente (implicando num ganho de $\$5 - \$2 = \$3$). Segue que portanto o lucro líquido é de $-2 \cdot 0{,}5934 + 3 \cdot 0{,}4066 = \$0{,}033$, ou aproximadamente três centavos de lucro por item.

Modelo Uniforme

Exemplo

Dada a v.a. X, uniforme em $(5, 10)$, calcule as probabilidades abaixo, usando a tabela do problema anterior.

(a) $P(X < 7)$

(b) $P(8 < X < 9)$

(c) $P(X > 8{,}5)$

(d) $P(|X - 7{,}5| > 2)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 195.

Modelo Uniforme

Note que a densidade de X é $f(x) = 1/(10-5)$ se $x \in (5, 10)$ e 0 caso contrário. Basta integrar na região dos eventos, isto é:

(a) $P(X < 7) = \int_{5}^{7} \frac{1}{5} dx = \frac{7}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$

(b) $P(8 < X < 9) = \int_{8}^{9} \frac{1}{5} dx = \frac{9}{5} - \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$

(c) $P(X > 8{,}5) = \int_{8,5}^{10} \frac{1}{5} dx = \frac{10}{5} - \frac{17}{10} = \frac{3}{10}$

(d) $P(|X - 7{,}5| > 2) = P(X > 9{,}5 \text{ ou } X < 5{,}5) =$
$\int_{9,5}^{10} \frac{1}{5} dx + \int_{5}^{5,5} \frac{1}{5} dx = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$

Modelo Normal

Exemplo

O peso bruto de latas de conserva é uma v.a. normal, com média $1.000g$ e desvio padrão $20g$.

(a) Qual a probabilidade de uma lata pesar menos de $980g$?

(b) Qual a probabilidade de uma lata pesar mais de $1.010g$?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 195.

Modelo Normal

Seja X a variável aleatória "peso da lata de conserva". Basta traduzir os enunciados em seus eventos e padronizar para consultar a tabela da Normal, isto é:

(a) $P(X < 980) = P(Z < [980 - 1000]/20) = P(Z < -1)$

(b) $P(X > 1010) = P(Z > [1010 - 1000]/20) = P(Z > 0{,}5)$

Modelo Normal

Exemplo

Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de $1.000 cm^3$ e o desvio padrão de $10 cm^3$. Pode-se admitir que a variável volume seja normal.

(a) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que $900 cm^3$?

(b) Qual é a porcentagem das garrafas em que o volume líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?

(c) O que acontecerá com a porcentagem do item (b) se a máquina for regulada de forma que a média seja $1.200 cm^3$ e o desvio padrão $20 cm^3$?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 196.

Modelo Normal

(a) $P(X < 900) = P(Z < [900 - 1000]/10) = P(Z < -10) = 7 \times 10^{-24}$; note que esse valor dificilmente está disponível em tabelas; para fins práticos, ele é igual a zero.

(b) No caso geral, $P(|X - \mu| < 2\sigma) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}9545 \approx 0{,}95$; portanto, 95% das garrafas estão a 2 desvios-padrões da média.

(c) $P(X < 900) = P(Z < [900 - 1200]/20) = P(Z < -15) = 3 \times 10^{-51}$. Novamente, é preciso empregar algum pacote estatístico (**R**, MATLAB, etc.) para calcular com precisão tal quantia.

Modelo Normal

Exemplo

Uma empresa produz televisores e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar algum defeito grave no prazo de seis meses. Ela produz televisores do tipo **A** (comum) e do tipo **B** (luxo), com lucros respectivos de \$1.000,00 e \$2.000,00, caso não haja restituição, e com prejuízos de \$3.000,00 e \$8.000,00, se houver restituição. Suponha que o tempo para a ocorrência de algum defeito grave seja, em ambos os casos, uma v.a. com distribuição normal, respectivamente, com médias 9 meses e 12 meses, e variâncias 4 meses^2 e 9 meses^2. Se tivesse de planejar uma estratégia de *marketing* para a empresa, você incentivaria as vendas dos aparelhos do tipo **A** ou do tipo **B**?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 196.

Modelo Normal

Basta verificar qual negócio é mais lucrativo para a empresa. A probabilidade de um televisor ser restituido é igual a probabilidade dele apresentar defeito em um prazo de seis meses:
$P(X_A < 6) = P(Z < [6-9]/2) = 0{,}066$, enquanto
$P(X_B < 6) = P(Z < [6-12]/3) = 0{,}023$. Isso significa que ao vender um televisor do tipo **A**, a empresa tem lucro de 1000 com 0,934 de probabilidade, e prejuízo de 3000 com 0,066 de probabilidade. Por outro lado, **B** dá lucro de 2000 com 0,977 de probabilidade, e prejuízo de 8000 com 0,023 de probabilidade.

Modelo Normal

O lucro médio de **A** é, portanto:

$$L(A) = 0{,}934 \cdot 1000 - 0{,}066 \cdot 3000 = 736$$

Enquanto o lucro médio de **B** é:

$$L(B) = 0{,}977 \cdot 2000 - 0{,}023 \cdot 8000 = 1770$$

Consequentemente, é mais interessante para a empresa vender televisores do tipo **B**.