# Aula de Exercícios - Intervalos de Confiança e Testes de Hipóteses

*Organização*: Rafael Tovar *Digitação*: Guilherme Ludwig

# Reagentes

## Exemplo

Tem-se dois reagentes, A e B, usados em laboratório para obter a expressão de um antígeno a certo tipo de parasita. Segundo os laboratórios que produzem os reagentes, com os dois é possível obter uma expressão média de 250 unidades de antígeno, com uma variação não superior a 7% quando o reagente é usado em indivíduos com doença crônica. Tomam um grupo de soros de indivíduos em estado crônico e fazem uma avaliação dos kits de reagente. Aleatoriamente, 20 soros são testados com reagente A e 25 com reagente B. No primeiro grupo a média de antígeno foi de 235 unidades com um desvio padrão de 23,5 unidades, no segundo grupo, a média foi de 262 unidades com um coeficiente de variação amostral de 8,5%.

# Reagentes

## Exemplo

Identifique as hipóteses que podem ser testadas na situação (são cinco hipóteses, quatro de uma população e uma de comparação entre populações).

Lembre-se que: variação relativa (em %) é o mesmo que coeficiente de variação.

Teste a hipótese $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$, e em seguida teste de maneira apropriada $\mu_A = \mu_B$.

# Reagentes

Existem cinco testes de hipóteses que podem ser testados, para verificar as suposições sobre os reagentes.

- Pode-se testar se a expressão média do antígeno $\mu = \mu_0$ para cada um dos reagentes, isto é, se $\mu_A = 250$ e $\mu_B = 250$.
- Pode-se testar $\sigma_A^2 = \sigma_0^2$ e $\sigma_B^2 = \sigma_0^2$, isto é, se $\sigma_A^2 = 306.25$ e $\sigma_B^2 = 306.25$ (lembre-se que $C.V. = \sigma_0/\mu_0 \Leftrightarrow \sigma_0^2 = (C.V. \cdot \mu)^2$).
- Pode-se testar se $\mu_A = \mu_B$, com variância conhecida (assumindo verdadeira a informação do fabricante sobre a variância) ou usando a variância amostral.

# Reagentes

Para testar a hipótese $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$, usamos a estatística $W = S_A^2/S_B^2 \sim F(n_A - 1, n_B - 1)$. Esse teste é chamado de *Teste F*. O valor observado da estatística $W$ é

$$W_0 = \frac{23.5^2}{(0.085 \cdot 262)^2} = 1.113$$

Se olharmos a distribuição $F$, com uma hipótese alternativa de $H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$, e fixando a probabilidade de erro tipo I em 1%, temos que $P(q_1 < W < q_2) = 0.99$ se, e somente se, $q_1 = 0.312$ e $q_2 = 3.013$. A região crítica é dada por

$$RC(\alpha = 1\%) = \{[W < 0.312] \cup [W > 3.013]\}$$

E como $W_0 = 1.113 \notin RC$, não rejeitamos a hipótese das variâncias serem iguais.

# Reagentes

O teste T apropriado para os dados é baseado em variância desconhecida, porém iguais. Ele é baseado na seguinte estatística:

$$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t_{(n_A+n_B-2)}$$

onde $S_p$, o desvio padrão comum (*pooled standard deviation*) é dado por

$$S_p^2 = \frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

# Reagentes

Calculamos $s_A^2 = 552.25$, $s_B^2 = 495.95$, e aí $s_p^2 = 520.82$. O valor observado da estatística T é dado por

$$t_0 = \frac{235 - 262}{\sqrt{495.95}\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}}} = -4.041$$

Escolhendo os quantis simétricos da T, com $(20 + 25 - 2) = 43$ graus de liberdade, temos que $P(|T| > q) = 0.01$ se $q = 3.531$. Como $|-4.041| > 3.531$, rejeitamos a hipótese das médias serem iguais.

# Reagentes

## Exemplo

Assuma que no mesmo exemplo dos reagentes, ao invés de 20 e 25, o experimento fosse feito com amostras de 50 soros para cada reagente e os resultados fossem:
Reagente A: média $= 240$ unidades; Variância$= 1296$
Reagente B: média $= 270$ unidades; Variância$= 467$
Compare os resultados obtidos com os dois experimentos. Use um erro do tipo I de 0.01.

# Reagentes

Para testar a hipótese $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$, usamos a estatística $W = S_A^2/S_B^2 \sim F(n_A - 1, n_B - 1)$. O valor observado da estatística $W$ é

$$W_0 = \frac{1296}{467} = 2.775$$

Se olharmos a distribuição $F$, com uma hipótese alternativa de $H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$, e fixando a probabilidade de erro tipo I em 1%, temos que $P(q_1 < W < q_2) = 0.99$ se, e somente se, $q_1 = 0.477$ e $q_2 = 2.097$. A região crítica é dada por

$$RC(\alpha = 1\%) = \{[W < 0.477] \cup [W > 2.097]\}$$

E como $W_0 = 2.775 \in RC$, rejeitamos a hipótese das variâncias serem iguais.

# Reagentes

Devemos empregar um teste T, com graus de liberdade dados pela fórmula

$$\nu = \frac{(C + D)^2}{C^2/(n_L - 1) + D^2/(n_A - 1)}$$

onde $C = s_A^2/n_A$ e $D = s_B^2/n_B$. A estatística do teste T com variâncias desconhecidas e desiguais é dada por

$$T = \frac{\bar{X}_L - \bar{X}_A}{\sqrt{S_L^2/n_L + S_A^2/n_A}}$$

Temos que $\nu = 80.255 \approx 80$.

# Reagentes

Sabemos que se $Y \sim t_\nu$ graus de liberdade, e $\nu \to \infty$, então $Y \to N(0,1)$. Como teremos $\nu = 80$ graus de liberdade, temos um número grande o bastante para que possamos considerar a estatistica do teste de diferenças de médias *aproximadamente* normal.

$$t_0 = \frac{240 - 270}{\sqrt{\frac{1}{50}(1296 + 467)}} = -5.052$$

Podemos calcular o P-valor calculando a probabilidade em $t_0$. Nesse caso, $P(|Z| > 5.052) = 4.37 \times 10^{-7}$, o que significa que rejeitamos a hipótese nula.

# Tratamentos Clínicos

## Exemplo

Um ensaio clinico é realizado para avaliar um novo tipo de tratamento contra uma doença e comparar os resultados com aqueles obtidos usando o tratamento tradicional. Espera-se que a diferença entre as proporções de curados seja de pelo menos 15%, se isto acontece, o tratamento antigo será retirado do mercado. Dos 500 pacientes tratados com o tratamento novo, 365 se curaram e dos 450 tratados com o antigo 290 se curaram. Numa experiência prévia realizada em outro país, 780 pacientes apresentaram cura num grupo de 1200 participantes tratados com o tratamento convencional.
Faça as comparações necessárias usando uma confiança de 99%. Confira os resultados com intervalos de confiança.

## Tratamentos Clínicos

A proporção de curados com o tratamento novo é de $p_{novo} = 365/500 = 0.730$. Já o tratamento antigo curou $p_{antigo} = 290/450 = 0.644$. Temos, além disso, uma referência prévia de 0.65 para o tratamento antigo.

Queremos testar a hipótese que $H_0 : p_n = p_a$, contra uma hipótese alternativa $H_1 : p_n > p_a$. Podemos afirmar que conhecemos a variância, pois temos um valor de referência para $p$. A estatística do teste é dada por:

$$T = \frac{p_n - p_a}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_n} + \frac{1}{n_a})}}$$

Que sob a hipótese nula, tem distribuição $N(0,1)$.

# Tratamentos Clínicos

A estatística observada foi

$$t_0 = \frac{0.73 - 0.644}{\sqrt{0.65(1-0.65)(\frac{1}{500}+\frac{1}{450})}} = 2.77$$

O quantil tal que $P(Z > q) = 0.01$ é dado por $q = 2.326$, então a região crítica do teste é dada por

$$RC(\alpha = 0.01) = \{T > 2.326\}$$

Como o valor observado é 2.77, temos evidência para rejeitar a hipótese nula. Então, o novo tratamento é mais eficiente.

# Indústria de Papel

## Exemplo

Uma indústria fabricante de papel tem fábricas em cidades diferentes. De acordo com os padrões internacionais, o engenheiro de processo tem uma confiança de 99% de que o processo de fabricação do papelão nas duas fábricas está sob controle se o peso médio de uma folha de papelão é de 700 gramas por metro quadrado, com coeficiente de variação de 5%. Para conferir a hipótese, decide-se medir o peso numa amostra aleatória de 50 folhas, em cada fábrica. Ao final da experiência, na fábrica A obtém-se uma média amostral de 690.2 $g/m^2$ e uma variância de 2128.9, enquanto na usina B a média amostral é de 680.8 $g/m^2$ com um desvio padrão de 46.51.

# Indústria de Papel

## Exemplo

Baseado nos padrões que regem as empresas produtoras de papel, o engenheiro assume que os pesos das folhas se ajustam bem a uma distribuição normal de probabilidade.

(a) Escreva as cinco hipóteses necessárias para avaliar a afirmação do engenheiro de produção.

(b) Com base na informação obtida nas amostras, teste as hipóteses do item anterior.

(c) Confira os resultados dos testes de hipótese usando intervalos de confiança.

# Indústria de Papel

(a) Existem cinco testes de hipóteses que podem ser testados, para verificar as afirmações do fabricante.

- Pode-se testar se $\mu = \mu_0$ em cada uma das fábricas, isto é, se $\mu_A = 700$ e $\mu_B = 700$.
- Pode-se testar se $\mu_A = \mu_B$, com variância conhecida (assumindo verdadeira a informação do fabricante sobre a variância) ou usando a variância amostral.
- Pode-se testar $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

# Indústria de Papel

(b) Lembre-se que $C.V. = \sigma/\mu$, então podemos organizar os dados numa tabela:

| | $\bar{X}$ | $S^2$ | $S$ | $C.V.$ |
|---|---|---|---|---|
| Fábrica A | 690.2 | 2128.9 | 46.14 | 6.7% |
| Fábrica B | 680.8 | 2163.2 | 46.51 | 6.8% |

Testamos a hipótese $\mu = 700$ contra $\mu \neq 700$ para as fábricas A e B. A estatística do teste é

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}$$

# Indústria de Papel

(b) (cont.) Como $n$ é grande ($n = 50$), a estatística do teste tem distribuição aproximadamente normal, e rejeitamos $H_0$ se $|t| \geq z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$, onde $z$ é o quantil da distribuição normal.

Observando os dados, e fixando a significância em 1% ($z_{0.995} = 2.58$), temos que para a fábrica A,

$$\left|t_0^A\right| = \left|\frac{690.2 - 700}{46.14/\sqrt{50}}\right| = |-1.502| < 2.58$$

Então não rejeitamos $H_0 : \mu_A = 700$.

## Indústria de Papel

(b) (cont.) Por outro lado, para a fábrica B, temos que

$$\left|t_0^B\right| = \left|\frac{680.8 - 700}{46.51/\sqrt{50}}\right| = |-2.919| > 2.58$$

Então rejeitamos $H_0 : \mu_B = 700$.
Se quisermos testar a hipótese $\mu_A = \mu_B$, devemos determinar antes se as variâncias são iguais, ou utilizar algum valor em que tenhamos plena segurança que seja o verdadeiro.

# Indústria de Papel

(b) (cont.) Vamos primeiro testar $H_0 : \sigma_A^2 = 1225$. A estatística para o teste e sua distribuição sob a hipótese nula são

$$Q = \frac{(n-1)S_A^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Foi observado que

$$Q_0 = \frac{49 \cdot 2128.9}{1225} = 85.156 > 79.49 = \chi_{49}^2(0.995)$$

Então temos evidência contra $H_0$, e rejeitamos a hipótese que $\sigma_A^2 = 1225$.

# Indústria de Papel

(b) (cont.) E quanto $\sigma_B^2$? Queremos agora testar $H_0 : \sigma_B^2 = 1225$. A estatística para o teste e sua distribuição sob a hipótese nula são as mesmas. Foi observado

$$Q_0 = \frac{49 \cdot 2169.18}{1225} = 86.527 > 79.49 = \chi^2_{49}(0.995)$$

Então temos evidência contra $H_0$, e também rejeitamos a hipótese que $\sigma_B^2 = 1225$.

# Indústria de Papel

(b) (cont.) Podemos dizer que $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$? Considere $W = S_A^2/S_B^2$. Como já vimos anteriormente, sob a hipótese nula, $W \sim F(n_A - 1, n_B - 1)$. Então

$$W_0 = \frac{2128.9}{2169.18} = 0.9814$$

A região crítica do teste é dada por

$$RC(0.01) = \{[W < 0.473] \cup [W > 2.113]\}$$

Como $W_0 = 0.9814 \notin RC(0.01)$, não rejeitamos a hipótese nula de que as variâncias sejam iguais.

# Indústria de Papel

(b) (cont.) Aplicando o teste T para variâncias iguais, temos que $s_p^2 = 2149.04$, e

$$t_0 = \frac{690.2 - 680.8}{\sqrt{2149.04}\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}}} = 1.0138$$

Como o número de graus de liberdade $\nu = 50 + 50 - 2 = 98$ é grande, podemos empregar a distribuição normal. Nesse caso, $P(|Z| > q) = 0.99$ se $q = 2.58$. Como $|t_0| = 1.0138 < 2.58$, não rejeitamos a hipótese nula. Ou seja, não temos evidência para dizer as médias de peso das fábricas sejam diferentes.

# Indústria de Papel

(c) Temos que:

- $\text{IC}\left(\mu_A, 99\%\right) = 690.2 \pm 2.58 \cdot \dfrac{46.14}{\sqrt{50}} = [673.36, 707.03]$
- $\text{IC}\left(\mu_B, 99\%\right) = 680.8 \pm 2.58 \cdot \dfrac{46.51}{\sqrt{50}} = [663.83, 697.76]$
- $\text{IC}\left(\mu_A - \mu_B, 99\%\right) = (690.2 - 680.8) \pm 2.58 \cdot \dfrac{46.51 + 46.51}{\sqrt{50}} = [-24.405, 43.205]$

# Indústria de Papel

(c) (cont.) Se fixarmos $P(q_1 < \chi^2 < q_2) = 1 - \alpha$, os ICs (simétricos) para $\sigma^2$ são determinados por

$$\frac{(n-1)}{q_2} S^2 < \sigma^2 < \frac{(n-1)}{q_1} S^2$$

- $\text{IC}\,(\sigma_A, 99\%) = [1312.31, 3276.91]$
- $\text{IC}\,(\sigma_B, 99\%) = [1333.45, 3786.92]$

## Indústria de Papel

(c) (cont.) Repare que os intervalos de confiança são testes aproximados. $700 \in \text{IC}\,(\mu_A, 99\%)$ e, de fato, não rejeitamos a hipótese $H_0 : \mu_A = 700$. Por outro lado, $700 \notin \text{IC}\,(\mu_B, 99\%)$ e rejeitamos a hipótese $H_0 : \mu_B = 700$. Mas, os intervalos têm uma intersecção, e não rejeitamos a hipótese que eles fossem iguais (bem como por 0 estar no IC da diferença).

De modo análogo, 1225 não está no IC pra nenhuma das variâncias, mas elas possuem uma intersecção. Rejeitamos que ambas fossem iguais a 1225, mas não rejeitamos que sejam iguais entre si.