Aula de Exercícios - Variáveis Aleatórias Contínuas

Organização: Airton Kist *Digitação*: Guilherme Ludwig

Introdução

Exemplo

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que esta é uma f.d.p.

(b) Calcule a probabilidade de $X > 10$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 166.

Introdução

(a) Uma f.d.p. deve satisfazer as seguintes propriedades:
   (i) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Note que e^{-x} é positiva para qualquer x, e consequentemente $2e^{-2x}$. Resta mostrar que sua integral é 1. Mas sabemos a antiderivada de $2e^{-2x}$:

$$\int 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}$$

Introdução

(a) (cont.) Note que a função está definida para $x \geq 0$; para $x < 0$, ela é 0. Então a integral é

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}dx =$$

$$= \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \lim_{x \to \infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-0}\right) = 1$$

(b) A probabilidade é dada por:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x \to \infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-2 \cdot 10}\right) = \frac{1}{e^{20}}$$

Introdução

Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0,1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ Cx & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ C(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) Qual valor deve ter a constante C?

(b) Faça o gráfico de $f(x)$.

(c) Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Introdução

(a) Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça

(i) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Por (i), temos que $C > 0$. Agora, para que C satisfaça (ii), devemos integrar $f(x)$:

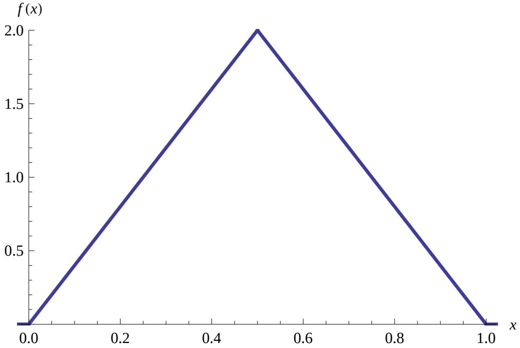
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx$$

$$= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1}(1-x)dx = C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right)$$

$$= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = C \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow C \text{ deve ser igual a } 4.$$

Introdução

(b) O gráfico de $f(x)$ é dado por:



Introdução

(c) Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes:

$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} 4xdx = 1/2$$

Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$.

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 171.

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Basta aplicar as definições de valor esperado e variância:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{1/2} 4x^2 dx + \int_{1/2}^{1} 4x(1-x)dx$$

$$= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}x^2(3-2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx =$$

$$\int_0^{1/2} 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 x dx + \int_{1/2}^{1} 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (1-x) dx =$$

$$\left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} + \left[-x^4 + \frac{8}{3}^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Exemplo

Considere que a variável aleatória X tem f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Se b for um número que satisfaz $-1 < b < 0$, calcule $P(X > b | X < b/2)$.

(b) Calcule $\mathbb{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 171.

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

(a) Queremos $P(X > b|X < b/2)$. Por definição,

$$P(X > b|X < b/2) = \frac{P(X > b, X < b/2)}{P(X < b/2)} = \frac{P(b < X < b/2)}{P(X < b/2)}$$

onde o evento $\{X > b, X < b/2\} = \{X > b\} \cap \{X < b/2\}$, daí a segunda igualdade. Basta agora encontrar as probabilidades:

$$P(b < X < b/2) = \int_b^{b/2} 3x^2 dx = \left[x^3\right]_b^{b/2} = \frac{b^3}{8} - b^3$$

$$P(X < b/2) = \int_{-1}^{b/2} 3x^2 dx = \left[x^3\right]_{-1}^{b/2} = 1 + \frac{b^3}{8}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

(a) (cont.) Note que b é negativo mas maior que -1, então $1 + b^3/8 \in [0, 1]$. Temos portanto:

$$P(X > b | X < b/2) = \frac{P(b < X < b/2)}{P(X < b/2)} = \frac{\frac{b^3}{8} - b^3}{1 + \frac{b^3}{8}}$$

(b) Aplicando a definição:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{0} 3x^3 dx = \frac{3}{4}\left[x^4\right]_{-1}^{0} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Var}(X) = \int_{-1}^{0} 3\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 x^2 dx = \frac{3}{80}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Exemplo

A demanda diária de arroz num supermercado, *em centenas de quilos*, é uma v.a. com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2x/3 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ -x/3 + 1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Exemplo (cont.)

(a) Qual a probabilidade de se vender mais do que 150 kg, num dia escolhido ao acaso?

(b) Em 30 dias, quanto o gerente do supermercado espera vender?

(c) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada à disposioção dos clientes diariamente para que não falte arroz em 95% dos dias?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 172.

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

(a) Basta integrar a função no intervalo adequado. Temos que 150kg é 1,5 em centenas de quilos, logo o evento que nos interessa é $\{X > 1{,}5\}$.

$$P(X > 1{,}5) = \int_{1{,}5}^{3} 1 - \frac{x}{3} dx = \left[x - \frac{x^2}{6} \right]_{1{,}5}^{3} = 0{,}375$$

(b) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_{30}$ os trinta dias, independentes e identicamente distribuidos, então

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \right) = \sum_{i=1}^{30} \mathbb{E}\left(X_i \right)$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

(b) (cont.) Mas $\mathbb{E}\left(X_i\right)$ é dada por:

$$\mathbb{E}\left(X_i\right) = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2 dx + \int_1^3 x\left(1 - \frac{x}{3}\right) dx = \frac{4}{3}$$

Daí temos que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = 30 \cdot \frac{4}{3} = 40$$

Portanto o supermercado vende, em média, 4 toneladas de arroz por mês.

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

(c) Queremos uma quantidade de arroz m que satisfaça $P(X < m) = 0{,}95$, isto é $\int_0^m f(x) = 0{,}95$

$$\int_0^m f(x) = \overbrace{\int_0^1 \frac{2}{3} x dx}^{1/3} + \int_1^m \left(1 - \frac{x}{3}\right) dx = 0{,}95$$

$$\int_1^m \left(1 - \frac{x}{3}\right) dx = \frac{37}{60} \Leftrightarrow -\frac{m^2}{6} + m - \frac{5}{6} = \frac{37}{60}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

(c) (cont.) vemos portanto que a quantidade m é uma das raízes da equação de segundo grau:

$$m^2 - 6m + \frac{87}{10} = 0$$

que tem soluções $0{,}1 \cdot (30 - \sqrt{30})$ e $0{,}1 \cdot (30 + \sqrt{30})$, ou aproximadamente 2,45228 e 3,54772. Como a variável aleatória está definida em $x \in [0, 3]$ e é zero fora do intervalo, tomamos a primeira solução, $m = 2{,}45228$.

Logo o supermercado precisa de aproximadamente 245kg de arroz para que não falte arroz em 95% dos dias.

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Exemplo

Suponha que X tenha f.d.p dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 172.

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Basta aplicar a definição. Note que devemos utilizar integração por partes para determinar a antiderivada:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} 2xe^{-2x}dx$$

Tomando $u = x$ e $dv = 2e^{-2x}dx$, temos $du = dx$ e $v = -e^{-2x}$, e aí

$$\int_{0}^{\infty} 2xe^{-2x}dx = \left[-xe^{-2x}\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} -e^{-2x}dx$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Ou seja

$$\int_0^\infty 2xe^{-2x}dx = -\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} + \int_0^\infty e^{-2x}dx$$

Posto que $-\lim_{x\to\infty} xe^{-2x}$ é 0, temos

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty 2xe^{-2x}dx = \int_0^\infty e^{-2x}dx = \frac{1}{2}\left[-e^{-2x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Para a variância, novamente aplicamos a definição:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 2e^{-2x} dx$$

$$\int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 2e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} 2x^2 e^{-2x} - 2xe^{-2x} + \frac{2}{4} e^{-2x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} 2x^2 e^{-2x} dx - \overbrace{\int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx}^{=\mathbb{E}(X)=1/2} + \overbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2x} dx}^{=1/4}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Queremos integrar $= \int_0^\infty 2x^2 e^{-2x} dx$ por partes. Note que $u = x^2$ e $dv = 2e^{-2x} dx$, ento $du = 2x dx$ e $v = -e^{-2x}$, logo

$$\int_0^\infty 2x^2 e^{-2x} dx = \left[-x^2 e^{-2x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -2xe^{-2x} dx$$

$$\int_0^\infty 2x^2 e^{-2x} dx = \lim_{x \to \infty} -x^2 e^{-2x} + \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$$

E portanto

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

Média, Variância & Função de Distribuição Acumulada

Uma observação: a variável aleatória X com densidade $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, com $\lambda > 0$, é dita ter *distribuição exponencial* com parâmetro λ. A notação é $X \sim \exp(\lambda)$.

Se $X \sim \exp(\lambda)$, então

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Uma Aplicação

Exemplo

Numa determinada localidade, a distribuição de renda (em *milhares de reais*) é uma v.a. X com f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}x + \frac{1}{10} & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3}{40}x + \frac{9}{20} & \text{se} \quad 2 < x \leq 6 \\ 0 & \text{se} \quad x > 6 \end{cases}$$

Uma Aplicação

Exemplo (cont.)

(a) Qual a renda média nessa localidade?

(b) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade de sua renda ser superior a $3.000,00?

(c) Qual a mediana da variável?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 194.

Uma Aplicação

(a) Aplicando a definição de média:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x\left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\right)dx + \int_2^6 x\left(\frac{9}{20} - \frac{3}{40}x\right)dx = \frac{37}{15}$$

Ou seja, a renda média é de $2.466,66.

(b) Queremos $P(X > 3)$, basta tomarmos a integral na região correspondente ao evento:

$$P(X > 3) = \int_3^6 \left(\frac{9}{20} - \frac{3}{40}x\right)dx = \frac{27}{80} = 0{,}3375$$

Uma Aplicação

(c) A mediana de uma variável aleatória contínua é m, solução da equação

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = 0{,}5$$

Ou, considerando a função de distribuição acumulada, $m = F^{-1}(0{,}5)$. Note primeiro que $P(X \in [0,2])$ é dada por

$$P(X \in [0,2]) = \int_0^2 \frac{1}{10}x + \frac{1}{10}dx = \left[\frac{x^2}{20} + \frac{x}{10}\right]_0^2 = \frac{4}{20} + \frac{2}{10} = \frac{2}{5}$$

Uma Aplicação

(c) (cont.) $P(X \in [0, 2]) = 2/5$ nos diz que $F(x)$ não acumulou 0,5 até 2; de fato, $F(2) = 2/5$. Então a mediana está no intervalo $[2, 6]$. Queremos portanto solucionar a equação

$$\frac{2}{5} + \int_2^m \left(\frac{9}{20} - \frac{3}{40}x \right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{9x}{20} - \frac{3x^2}{80} \right]_2^m = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$$

$$-\frac{3m^2}{80} + \frac{9m}{20} - \frac{18}{20} + \frac{12}{80} - \frac{1}{10} = 0$$

Uma Aplicação

(c) Temos finalmente que a mediana é a solução factível da equação

$$-3m^2 + 36m - 68 = 0$$

Que tem raízes $m_1 = 2/3(9 - \sqrt{30})$ e $m_2 = 2/3(9 + \sqrt{30})$, ou aproximadamente 2,35 e 9,65, respectivamente. Como só a primeira raiz está no intervalo em que a densidade é diferente de zero, e de fato $F(2{,}35) = 0{,}5$ enquanto $F(9{,}65) = 1$, temos que

$$\text{Mediana}(X) = 2{,}35$$