Aula de Exercícios - Variáveis Aleatórias Contínuas (II)

Organização: Rafael Tovar   *Digitação*: Guilherme Ludwig

Exemplo VIII

Distribuição contínua

Seja X a v. a. contínua cuja densidade de probabilidade é

$$f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(a) Calcule a distribuição acumulada $F(x)$, o valor esperado $\mathbb{E}(X)$, a variância $\mathrm{Var}(X)$ e o desvio padrão $\sigma(X)$.

(b) Calcule $P(0 < X < 1/2)$ e $P(1/3 < X < 1)$.

(c) Grafique $F(x)$ e determine o valor de x_0 tal que $F(x_0) = 0.95$.

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo VIII

(a) A função de distribuição acumulada, em $[0, 1]$, é dada por:

$$\int_0^x 2t dt = x^2$$

Daí concluímos que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo VIII

(a) (cont.) A esperança é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x2xdx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Para calcular a variância, lembre-se da fórmula $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$, então

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 2xdx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Finalmente, observe que $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ e logo $\sigma(X) = \sqrt{2}/6$.

Exemplo VIII

(b) Conhecemos $F(x)$, a função de distribuição acumulada. Então temos simplesmente que

$$P(0 < X < 1/2) = P(X < 1/2) - P(X < 0) = F(0.5) - F(0) =$$

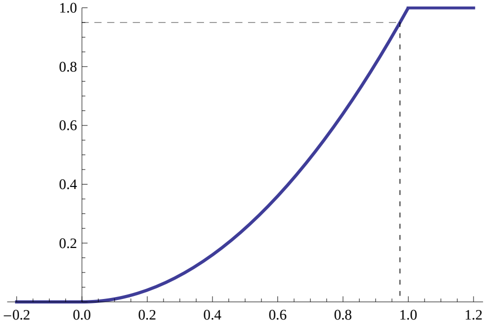
$$= 0.5^2 - 0 = 0.25$$

$$P(1/3 < X \leq 1) = P(X < 1) - P(X < 1/3) = F(1) - F(1/3) =$$

$$= 1^2 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}$$

Exemplo VIII

(c) O ponto x_0 que satisfaz $F(x_0) = (x_0)^2 = 0.95$ é $x_0 = 0.9746$. O gráfico de $F(x)$ com o par $(x_0, F(x_0))$ destacado é dado por:



Exemplo IX - Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

Assuma que o tempo de duração X de uma consulta média tenha distribuição exponencial com média de 10 minutos. Calcule a probabilidade dos seguintes eventos:

(a) Uma consulta demora 20 minutos no máximo;

(b) Uma consulta demora mais que 20 minutos;

(c) Uma consulta demora mais do que o tempo médio.

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo IX - Distribuição Exponencial

Se $X \sim exp(\lambda)$, então $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$. Como $\mathbb{E}(X) = 10$, então $\lambda = 1/10$. Portanto $F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{10}x}$.

(a) $P(20 \text{ minutos no máximo}) = P(X \leq 20) = F(20) = 0.3935$

(b) $P(\text{demora mais que 20 minutos}) = P(X > 20) = 1 - F(20) = 0.6065$

(c) $P(\text{consulta demora mais que o tempo média}) = P(X > 10) = e^{-1} = 0.3679$

Exemplo X - Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

Suponha que a duração de uma componente eletrônica possui distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 1$, calcule:

(a) A probabilidade de que a duração seja menor que 10.

(b) A probabilidade de que a duração esteja entre 5 e 15.

(c) O valor t_0 tal que a probabilidade de que a duração seja maior que t_0 assuma o valor 0.01.

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo X - Distribuição Exponencial

(a) $P(\text{Duração seja menor que } 10) = P(X \leq 10) = 1 - e^{-10} = 0.999$

(b) $P(5 < X < 15) = P(X < 15) - P(X < 5) = e^{-5} - e^{-15} = 0.0067$

(c) $P(X > t) = 0.01 \Leftrightarrow e^{-t} = 1/100 \Leftrightarrow t = 4.605$

Exemplo XI - Distribuição Normal

Distribuição Normal

Considere o peso de um puma macho adulto como uma variável aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Sabe-se que 33,0% destes animais tem peso inferior a $82.8kg$ e também que 0,4% tem peso superior a $98.25kg$. Calcule μ e σ.
Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo XI - Distribuição Normal

Sabemos que $P(X < 82.8) = 0.33$ e $P(X > 98.25) = 0.004$. Note que

$$P(X < 82.8) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{82.8-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{82.8-\mu}{\sigma}\right)$$

mas $\Phi(z) = 0.33 \Leftrightarrow z = -0.4399$. Então

$$\frac{82.8-\mu}{\sigma} = -0.4399$$

ou simplesmente

$$82.8 - \mu = -0.44\sigma$$

Exemplo XI - Distribuição Normal

De modo análogo,

$$P(X > 98.25) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{98.25-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{98.25-\mu}{\sigma}\right)$$

mas $1 - \Phi(z) = 0.004 \Leftrightarrow z = 2.65$. Então

$$\frac{98.25-\mu}{\sigma} = 2.65$$

ou simplesmente

$$98.25 - \mu = 2.65\sigma$$

Exemplo XI - Distribuição Normal

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 82.8 & - & \mu & = & -0.44\sigma \\ 98.25 & - & \mu & = & 2.65\sigma \end{cases}$$

Donde concluímos que $\mu = 85$ e $\sigma = 5$. Logo, o peso de um puma macho adulto tem distribuição $N(85, 25)$.

Exemplo XII - Distribuições Binomial e Exponencial

Distribuição Binomial e Exponencial

Seja X a v. a. que representa o tempo de falha (em horas) da bateria de um carro de uma dada marca. Suponha que X possui distribuição exponencial com média 200 h. Se 16 baterias idênticas são instaladas de modo que funcionem independentemente uma da outra, qual é a probabilidade de que mais da metade das baterias permaneçam funcionando no final de 100 h?

Fonte: Márcio Lanfredi, notas de aula.

Exemplo XII - Distribuições Binomial e Exponencial

Seja a v. a. Y que representa o número de baterias que permanecem funcionando no final de 100 h. Logo, a v. a. Y tem distribuição Binomial de parâmetros $n = 16$ e p.
A probabilidade de uma bateria permanecer funcionando no final de 100 h é

$$p = \int_t^{\infty} \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}x} dx = e^{-\frac{100}{200}} = 0.6065$$

Então, a probabilidade de que mais da metade das baterias permaneçam funcionando no final de 100 h é
$P(Y \geq 16/2) = P(Y \geq 8)$.

Exemplo XIII - Distribuição Normal e Teorema de Bayes

Distribuição Normal e Teorema de Bayes

Suponha que o *Homo Sapiens neanderthalensis* tenha uma caixa craniana cujo volume (em cm^3) pode ser aproximada por uma normal com média 1500 e desvio padrão 300; enquanto a distribuição do volume da caixa craniana do *Homo Sapiens sapiens* possa ser aproximada por uma normal com média 1400 e desvio padrão 200. Suponha que no sul da França 10% das ossadas sejam de Neandertais e 90% de homens modernos (*Homo Sapiens sapiens*).

(a) Calcule o nonagésimo quinto percentil da distribuição do volume da caixa craniana do Homem de Neanderthal e verifique a que percentil ele equivale na distribuição do volume de caixa craniana do homem moderno.

Exemplo XIII - Distribuição Normal e Teorema de Bayes

Distribuição Normal e Teorema de Bayes

(b) Qual a probabilidade de que o volume de um crânio de *Homo sapiens* (moderno ou de Neanderthal) encontrado ao acaso no sul da França seja maior do que $1500cm^3$?

(c) Considere que um crânio tenha sido encontrado mas sua origem não tenha sido determinada. Sabendo que seu volume é de menos do que $1500cm^3$, calcule a probabilidade de que se trate de um *Homo Sapiens neanderthalensis*.

Fonte: Márcio Lanfredi, notas de aula.

Exemplo XIII - Distribuição Normal e Teorema de Bayes

Considere as v. a. V e Y que representam, respectivamente, o volume da caixa craniana e a espécie do Homo Sapiens. Logo,

$$V_N = V|\{Y = H.\ S.\ neandertal\} \sim N(1500, 300^2)$$

$$V_S = V|\{Y = H.\ S.\ sapiens\} \sim N(1400, 200^2)$$

$$Z_N = \frac{V_N - 1500}{300} \sim N(0,1) \qquad \text{e} \qquad Z_S = \frac{V_S - 1400}{200} \sim N(0,1)$$

Exemplo XIII - Distribuição Normal e Teorema de Bayes

(a) O nonagésimo quinto percentil é dado por

$$P\left(\frac{V_N - 1500}{300} \leq \frac{v - 1500}{300}\right) = 0.95 \Leftrightarrow \frac{v - 1500}{300} = 1.65$$

O que nos diz que $v = 1995$. Logo, o nonagésimo quinto percentil da distribuição do volume da caixa craniana do Homem de Neandertal é 1995.

Além disso, $P(V_S \leq 1995) = P(Z_S \leq 2.975) = 0.9985$.

Exemplo XIII - Distribuição Normal e Teorema de Bayes

(b) A probabilidade de um crânio de Homo Sapiens (moderno ou de Neandertal) encontrado ao acaso no sul da França seja maior do que $1500cm^3$ é $P(V \geq 1500) =$

$$P(V \geq 1500|Y = S)P(Y = S)+P(V \geq 1500|Y = N)P(Y = N)$$

$$= P(V_S \geq 1500)P(Y = S) + P(V_N \geq 1500)P(Y = N)$$

Como $P(V_S \geq 1500) = 1 - P(V_S < 1500) = 1 - P(Z_S < 0.5) = 0.3085$ e de modo análogo $P(V_N \geq 1500) = 1 - P(Z_N < 0) = 0.5$, então

$$P(V \geq 1500) = 0.3085 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.3276$$

Exemplo XIII - Distribuição Normal e Teorema de Bayes

(c) Temos que

$$P(Y = N | V \leq 1500) = \frac{P(V \leq 1500 | Y = N) P(Y = N)}{P(V \leq 1500)}$$

$$= \frac{0.5 \cdot 0.1}{1 - 0.327} = \frac{0.05}{0.673} = 0.074$$

Exemplo XIV - Distribuições Binomial e Exponencial

Distribuições Binomial e Exponencial

Seja X o nível de TSH em um indivíduo. Assume-se que X tem distribuição exponencial com média $3\mu UI/mL$. Toma-se uma amostra de 12 trabalhadores de uma empresa madeireira. Se mais da metade dos indivíduos da amostra tem níveis de TSH maiores que $4.8\mu UI/mL$, realiza-se um programa de intervenção com o total de trabalhadores da empresa. Qual a probabilidade do programa?

Exemplo XIV - Distribuições Binomial e Exponencial

Se $X \sim exp(\lambda)$ e $\mathbb{E}(X) = 3$, então $\lambda = 1/3$. A probabilidade de que um indivíduo tenha mais que $4.8 \mu UI/mL$ é dada por

$$p = P(X > 4.8) = e^{-\frac{1}{3}4.8} = 0.2019$$

Sabemos portanto que o número de indivíduos com TSH superior a 4.8 na amostra de 12 tem distribuição binomial, com parâmetros $n = 12$ e $p = 0.2019$.

Exemplo XIV - Distribuições Binomial e Exponencial

Seja $Y =$ o número de indivíduos com TSH superior a 4.8 na amostra. Então a probabilidade de $Y > 6$ é dada por

$$P(Y > 6) = \sum_{k=7}^{12} P(Y = k) = \sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} 0.202^k \cdot 0.798^{12-k} = 0.004$$

Ou seja, a probabilidade de uma intervenção ser necessária é de apenas 0.4%.