Aula de Exercícios - Variáveis Aleatórias Discretas - Modelos Probabilísticos

Organização: Airton Kist *Digitação*: Guilherme Ludwig

Alguns Modelos Probabilísticos

Exercício

Se $X \sim b(n, p)$, sabendo-se que $\mathbb{E}(X) = 12$ e $\sigma^2 = 3$, determinar:

(a) n

(b) p

(c) $P(X < 12)$

(d) $P(X \geq 14)$

(e) $\mathbb{E}(Z)$ e $\text{Var}(Z)$, onde $Z = (X - 12)/\sqrt{3}$

(f) $P(Y \geq 14/16)$, onde $Y = X/n$

(g) $P(Y \geq 12/16)$, onde $Y = X/n$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 151.

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com a média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que num minuto se tenha:

(a) dez ou mais chamadas;

(b) menos que nove chamadas;

(c) entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 152.

Alguns Modelos Probabilísticos

Sabemos que se $X \sim$ Poisson(λ), então $P(X = x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!$. Além disso, $\mathbb{E}(X) = \lambda$. O enunciado diz "média de oito chamadas por minuto", então a variável aleatória $X =$ número de chamadas por minuto tem distribuição Poisson(8).

(a) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) =$
$$1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-8}8^k}{k!} = 1 - e^{-8} - \ldots - \frac{e^{-8}8^9}{9!} = 0{,}2833.$$

(b) $P(X < 9) = 1 - P(X \geq 9) = 0{,}5926$

(c) $P(7 \leq X < 9) = P(7 \leq X \leq 8) = P(X = 7) + P(X = 8) =$
$$\frac{e^{-8}8^7}{7!} + \frac{e^{-8}8^8}{8!} = 0{,}2792$$

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é de 0,2. Se dez itens produzidos por essa máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um defeituoso seja encontrado? Use a binomial e a distribuição de Poisson e compare os resultados.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 152.

Alguns Modelos Probabilísticos

O evento "não mais do que 1 item defeituoso" é dado por $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$, onde X é o número de itens defeituosos. Sua probabilidade é $P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1)$

Se utilizamos a distribuição binomial, $X \sim b(10, 0{,}2)$, então

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0}(1-p)^{10} + \binom{10}{1}p(1-p)^{9}$$

$$= \binom{10}{0}0{,}8^{10} + \binom{10}{1}0{,}2 \cdot 0{,}8^{9} = 0{,}3758$$

Alguns Modelos Probabilísticos

Por outro lado, se utilizamos a distribuição Poisson para aproximar a binomial, temos que $X \sim$ Poisson(2) (onde $\lambda = n \cdot p$), e a probabilidade do evento $\{X = 0\} \cup \{X = 1\}$ é dada por:

$$P(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$
$$= \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 3 \cdot e^{-2} = 0{,}4060$$

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Examinaram-se 2000 ninhadas de cinco porcos cada uma, segundo o número de machos. Os dados estão representados na tabela abaixo:

Nº. de Machos	Nº. de Ninhadas
0	20
1	360
2	700
3	680
4	200
5	40
Total	2000

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo (cont.)

(a) Calcule a proporção média de machos.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 152.

Alguns Modelos Probabilísticos

(a) As proporções de machos nas ninhadas são de $0\%, 20\%, \ldots, 80\%, 100\%$, para respectivamente $0, 1, \ldots, 5$ machos em uma ninhada de 5. Cada proporção tem uma probabilidade correspondente ao número de ninhadas com aquela proporção, isto é,

$$\%M = \frac{0}{5}\frac{20}{2000} + \frac{1}{5}\frac{360}{2000} + \frac{2}{5}\frac{700}{2000} + \frac{3}{5}\frac{680}{2000} + \frac{4}{5}\frac{200}{2000} + \frac{5}{5}\frac{40}{2000}$$

$$\%M = \frac{12}{25} = 48\%$$

Então, cada ninhada tem 48% de machos, em média.

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho quatro contenha:

(a) Nenhum defeituoso?
(b) Exatamente um defeituoso?
(c) Exatamente dois defeitosos?
(d) Não mais do que dois defeituosos?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 157.

Alguns Modelos Probabilísticos

Cada artigo é um ensaio de Bernoulli(0,1). Uma amostra de 4 artigos tem, portanto, distribuição binomial com parâmetros 4 e 0,1. Seja Y a variável aleatória "número de artigos defeituosos na amostra"

(a) $P(Y = 0) = \binom{4}{0} 0{,}9^4 = 0{,}6561$

(b) $P(Y = 1) = \binom{4}{1} 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$

(c) $P(Y = 2) = \binom{4}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$

(d) $P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0{,}9963$

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Um fabricante de peças de automóveis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% de peças defeituosas, qual a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 157.

Alguns Modelos Probabilísticos

A variável X = "número de peças defeituosas" tem distribuição binomial com parâmetros $n = 18$ e $p = 0{,}05$. A probabilidade de uma caixa satisfazer a promessa do fabricante (isto é, $X \leq 2$) é dada por:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}9419$$

Ou seja, a probabilidade de que uma caixa satisfaça a garantia é de 94,19%.

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Um curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se dez funcionários quaisquer participam desse curso, encontre a probabilidade de:

(a) Exatamente sete funcionários aumentarem a produtividade.

(b) Não mais do que oito funcionários aumentarem a produtividade.

(c) Pelo menos três funcionários não aumentarem a produtividade.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 157.

Alguns Modelos Probabilísticos

Considere X um ensaio de Bernoulli com X=1 se o funcionário aumenta a produtividade, $P(X = 1) = 0{,}8$. Seja Y o total de funcionários, entre dez deles, que aumentaram a produtividade depois do treinamento.

(a) $P(Y = 7) = \binom{10}{7} 0{,}8^7 0{,}2^3 = 0{,}2013$

(b) $P(Y \leq 8) = 1 - P(Y = 9) - P(Y = 10) =$
$1 - \binom{10}{9} 0{,}8^9 0{,}2^1 - \binom{10}{10} 0{,}8^{10} = 0{,}6241$

(c) $P(Y \leq 7) = 0{,}6241 - P(Y = 8) = 0{,}3221$

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Determinado tipo de parafuso é vendido em caixas com 1000 peças. É uma característica da fabricação produzir 10% com defeito. Normalmente, cada caixa é vendida por $13,50. Um comprador faz a seguinte proposta: de cada caixa, ele escolhe uma amostra de 20 peças; se a caixa não tiver parafusos defeituosos, ele paga $20,00; um ou dois defeituosos, ele paga $10,00; três ou mais defeituosos, ele paga $8,00. Qual alternativa é a mais vantajosa para o fabricante? Justifique.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 158.

Alguns Modelos Probabilísticos

Na primeira alternativa, o lucro esperado é sempre de \$13,50. Seja X o número de parafusos com defeitos, $X \sim b(20, 0{,}1)$. Na segunda proposta, o lucro esperado é de:

$$\mathbb{E}(L) = \$20{,}00 \cdot P(X = 0) + \$10{,}00 \cdot (P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$+\$8{,}00 \cdot P(X \geq 3)$$

$$\mathbb{E}(L) = \$20{,}00 \cdot 0{,}1216 + \$10{,}00 \cdot (0{,}2702 + 0{,}2852) + \$8{,}00 \cdot 0{,}323$$

$$\mathbb{E}(L) = \$10{,}57$$

Logo, é mais vantajoso para o fabricante recusar a proposta do comprador.

Alguns Modelos Probabilísticos

Exercício

Uma fábrica produz válvulas, das quais 20% são defeituosas. As válvulas são vendidas em caixas com dez peças. Se uma caixa não tiver nenhuma defeituosa, seu preço de venda é \$10,00; tendo uma, o preço é \$8,00; duas ou três, o preço é \$6,00; mais do que três, o preço é \$2,00. Qual o preço médio de uma caixa?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 159.

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Um industrial fabrica peças, das quais $1/5$ são defeituosas. Dois compradores **A** e **B**, classificaram as partidas adquiridas em categorias *I* e *II*, pagando $1,20 e $0,80 respectivamente do seguinte modo:

> Comprador **A**: retira uma amostra de cinco peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como *II*.
>
> Comprador **B**: retira uma amostra de dez peças; se encontrar mais que duas defeituosas, classifica como *II*.

Em média, qual comprador oferece mais lucro?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 159.

Alguns Modelos Probabilísticos

Sabemos que $1/5$ das peças são defeituosas. Então, o experimento do comprador **A** tem distribuição $X_A \sim b(5, 1/5)$ enquanto o experimento do comprador **B** tem distribuição $X_B \sim b(10, 1/5)$.

$$P(X_A > 1) = 1 - P(X_A = 0) - P(X_A = 1) =$$

$$= 1 - \binom{5}{0}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = 0{,}2627$$

Alguns Modelos Probabilísticos

De modo similar,

$$P(X_B \geq 2) = 1 - \binom{10}{0}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1}\frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{9} -$$

$$-\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{8} = 0{,}3222$$

Como o segundo comprador irá classificar o lote como *II* com maior probabilidade que o primeiro, ele é o que oferece menor lucro para o fornecedor.

Alguns Modelos Probabilísticos

Exemplo

Num teste do tipo certo/errado, com 50 questões, qual é a probabilidade de que um aluno acerte 80% das questões, supondo que ele as responda ao acaso?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 160.

Alguns Modelos Probabilísticos

A resposta do aluno, ao acaso, tem distribuição Bernoulli(0,5). As 50 questões, ao todo, tem distribuição Binomial com parâmetros 50 e 0,5. 80% da prova corresponde a 40 questões.

$$P(X = 40) = \binom{50}{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = 9{,}12 \times 10^{-6}$$

Note que a aproximação Poisson, com $\lambda = 25 = n \cdot p$, é

$$P(Z = 40) = e^{-25}25^{40}/40! = 1{,}408 \times 10^{-3}$$