Aula de Exercícios - Variáveis Aleatórias Contínuas

Organização: Rafael Tovar *Digitação*: Guilherme Ludwig

Exemplo I - Distribuição Uniforme

Distribuição Uniforme

Seja X uma variável aleatória distribuida uniformemente, com média 15 e variância $25/3$.

(a) Encontre a função de densidade de X.

(b) Qual é a probabilidade que $X > 14$?

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo I - Distribuição Uniforme

(a) Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

e sua variância por

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo I - Distribuição Uniforme

(a) (cont.) Temos o seguinte sistema, portanto:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} & = & 15 \\ \frac{(b-a)^2}{12} & = & \frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b & = & 30 \\ (b-a)^2 & = & 100 \end{cases}$$

Ou simplesmente

$$\begin{cases} a & + & b & = & 30 \\ b & - & a & = & 10 \end{cases}$$

Que tem solução $a = 10$, $b = 20$, o que nos mostra que $X \sim U[10, 20]$ e $f(x) = \frac{1}{10}$ se $x \in [10, 20]$ e 0 caso contrário.

Exemplo I - Distribuição Uniforme

(b) A probabilidade de que $X > 14$ é dada por

$$P(X > 14) = \int_{14}^{20} \frac{1}{10} dx = \frac{(20 - 14)}{10} = 0.6$$

Exemplo II - Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

O tempo médio que um consumidor gasta no supermercado é de 25 minutos. Então qual é a probabilidade que um consumidor gaste mais de trinta minutos no supermercado?
Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo II - Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é a adequada para esse tipo de problema, visto que ela modela o tempo de chegada de algum evento. Sendo assim, temos que $X \sim exp(\lambda)$, e como $25 = \mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, então $\lambda = 1/25$. Logo

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{30}{25}}\right) = 0.3013$$

Exemplo III - Distribuição Exponencial

Distribuição Exponencial

O tempo de vida, X, em horas, de um componente eletrônico segue uma distribuição exponencial de tal forma que $P(X \leq 1000) = 0.75$. Qual é o tempo médio de vida do componente?

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo III - Distribuição Exponencial

Sabemos que se $X \sim exp(\lambda)$, então $F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ e $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$. Basta então observarmos que

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0.75 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(4)}{1000} = 0.0013863$$

Concluimos então que o tempo médio de vida, $\mathbb{E}(X)$, é igual a $1/0.0013863 = 721.3475$ horas, e que 75% dos componentes duram 1000 horas ou menos.

Exemplo IV - Distribuição Normal

Distribuição Normal

Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

(c) O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0{,}99$

Fonte: Ribeiro, André L. P., notas de aula.

Exemplo IV - Distribuição Normal

Queremos transformar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ em $Z \sim N(0,1)$, para poder consultar a tabela da normal padronizada[1].

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(X - \mu \leq 2\sigma) = P((X - \mu)/\sigma \leq 2) = P(Z \leq 2) = 0.9772$

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(|X - \mu|/\sigma \leq 1) = P(|(X - \mu)/\sigma| \leq 1) = P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.6827$

[1] http://www.ime.unicamp.br/~veronica/Coordenadas1s/N.pdf

Exemplo IV - Distribuição Normal

(c) Note que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = P(-a \leq (X - \mu)/\sigma \leq a) = P(-a \leq Z \leq a)$. Como X é simétrica, então sabemos que $2P(Z > a) = 2P(Z < -a) = 1 - P(-a \leq Z \leq a)$.

Basta então olhar qual a satisfaz $P(Z > a) = 0{,}005$. Consultando a tabela, vemos que $a = 2,5758$.

Exemplo V - Distribuição Exponencial

Imunoglobulina E

A produção de Imunoglobulina E num indivíduo com uma doença viral tem um comportamento exponencial com média $15g/100ml$ de sangue. Calcule $P(X \leq 12)$, $P(8 < X < 10)$, $P(X > 12)$, $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$ e σ_X.

Note que a unidade de medida é $g/100ml$.

Exemplo V - Distribuição Exponencial

Recorde-se que se $X \sim exp(\lambda)$, então $\mathbb{E}(X) = \lambda^{-1}$ e $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Pelo enunciado do problema, $\mathbb{E}(X) = 15$, então $\lambda = 1/15$. Temos então que:

- $P(X \leq 12) = F(12) = 1 - e^{-\frac{1}{15}12} = 0.5507$
- $P(8 < X < 10) = P(X < 10) - P(X < 8) = F(10) - F(8) = e^{-\frac{1}{15}8} - e^{-\frac{1}{15}10} = 0.0732$
- $P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12) = e^{-\frac{1}{15}12} = 0.4493$
- $\mathbb{E}(X) = 15$, pelo enunciado.
- Se $X \sim exp(\lambda)$, então $\mathrm{Var}(X) = \lambda^{-2}$. Daí concluímos que $\mathrm{Var}(X) = 15^2 = 225$, e $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 15$.

Exemplo VI - Distribuição Exponencial

Tempo de Sobrevivência

O tempo de sobrevivência das larvas de uma família de insetos, quando expostos a um agente químico, se ajusta a uma distribuição exponencial com média $\lambda^{-1} = 45$ minutos.

(a) Qual é $f(x)$ e $F(x)$?

(b) Qual é $P(X > 1$ hora$)$? E $P(0.5$ hora $< X < 1$ hora$)$?

(c) (Exercício) Interprete os resultados de (b) em termos do exemplo.

Exemplo VI - Distribuição Exponencial

(a) Se considerarmos a escala de X em horas, então a média é $0.75 = \lambda^{-1}$. Conclui-se que $\lambda = 1.33$. Portanto,

$$f(x) = 1.33e^{-1.33x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-1.33x}$$

(b) Posto que conhecemos $F(x)$, temos que

$$P(X > 1 \text{ hora}) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = e^{-1.33} = 0.2636$$

$$P(0.5 \text{ hora} < X < 1 \text{ hora}) = P(X < 1) - P(X < 0.5) =$$
$$F(1) - F(0.5) = e^{-1.33 \cdot 0.5} - e^{-1.33} = 0.2498$$

Exemplo VII - Distribuição Normal

Níveis de citocina no sangue

Os níveis de certa citocina no sangue humano tem uma distribuição Normal com média $2.5g/100ml$ de sangue, e variância de $0.0625g/100ml$ de sangue. Que proporção da população se espera que tenha níveis de citocina entre 1.0 e $2.0g/100ml$?

Note que a unidade de medida é $g/100ml$.

Exemplo VII - Distribuição Normal

Sabemos que $X =$ nível de citocina no sangue, em $g/100ml$, tem distribuição $X \sim N(2.5, (0.25)^2)$. Então

$$\frac{X - 2.5}{0.25} \sim N(0, 1)$$

Portanto,

$$P(1.0 < X < 2.0) = P\left(\frac{1.0 - 2.5}{0.25} < \frac{X - 2.5}{0.25} < \frac{2.0 - 2.5}{0.25}\right) =$$

$$P(-6 < Z < -2) = \Phi(-2) - \Phi(-6) = 0.0227$$

Então a proporção esperada da população com nível de citocina entre 1.0 e $2.0g/100ml$ é de 2,27%.