Aula de Exercícios - Variáveis Aleatórias Discretas

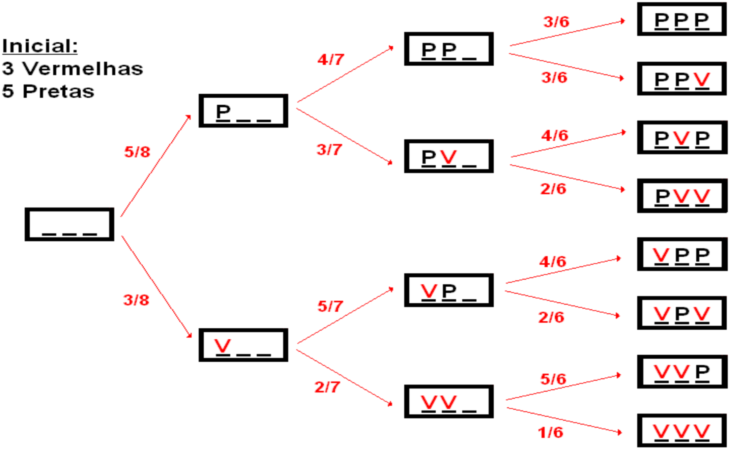
Organização: Airton Kist *Digitação*: Guilherme Ludwig

Valor Médio de uma variável aleatória

Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas. Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória X igual ao número de bolas pretas. Obtenha a distribuição de X. *Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 135.

Repare que não há reposição: a primeira extração tem 5 possibilidades em 8 de ser uma bola preta; mas, a segunda terá 5 em 7 se a primeira for vermelha, ou 4 em 7 se a primeira foi preta, e assim por diante.

Valor Médio de uma variável aleatória



Valor Médio de uma variável aleatória

A partir do gráfico, podemos construir uma tabela com os eventos PPP, PPV, etc.

Extrações	Probabilidade
PPP	$5/8 * 4/7 * 3/6 = 5/28$
PPV	$5/8 * 4/7 * 3/6 = 5/28$
PVP	$5/8 * 3/7 * 4/6 = 5/28$
VPP	$3/8 * 5/7 * 4/6 = 5/28$
PVV	$5/8 * 3/7 * 2/6 = 5/56$
VPV	$3/8 * 5/7 * 2/6 = 5/56$
VVP	$3/8 * 2/7 * 5/6 = 5/56$
VVV	$3/8 * 2/7 * 1/6 = 1/56$

Valor Médio de uma variável aleatória

Finalmente, observe que são equivalentes os eventos:

$$\begin{aligned}
\{X=0\} &= \{VVV\} \\
\{X=1\} &= \{VVP\} \cup \{VPV\} \cup \{PVV\} \\
\{X=2\} &= \{PPV\} \cup \{PVP\} \cup \{VPP\} \\
\{X=3\} &= \{PPP\}
\end{aligned}$$

Somando as probabilidades dos eventos, encontradas anteriormente, obtemos a função de distribuição de X:

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,02	0,27	0,53	0,18

Valor Médio de uma variável aleatória

Podemos calcular a esperança de X a partir de sua função de probabilidade:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{x=1}^{4} x * p_X(x) = 0{,}27 + 0{,}53 * 2 + 0{,}18 * 3 = 1{,}87$$

Variáveis aleatórias discretas

Considere novamente a urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas. Seja X a variável aleatória igual ao número de bolas pretas, depois de três extrações sem reposição. Encontre a distribuição de $3X$ e X^2. *Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5ª edição, pág 139.

Variáveis aleatórias discretas

Temos que para essas transformações, alteram-se os eventos mas as probabilidades ficam as mesmas. Isto é, para $3X$, temos a função de distribuição dada por:

x	0	3	6	9
$p_{3X}(x)$	0,02	0,27	0,53	0,18

E para X^2, temos a função de distribuição dada por:

x	0	1	4	9
$p_{X^2}(x)$	0,02	0,27	0,53	0,18

Variáveis aleatórias discretas

Note que podemos calcular a esperança de X^2 a partir de sua função de probabilidade:

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{x=1}^{4} x^2 * p_X(x) = 0{,}27 + 0{,}53 * 4 + 0{,}18 * 9 = 4{,}01$$

E que podemos usar a esperança da variável X^2 para calcular a variância de X, através da fórmula:

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 = 4{,}01 - 1{,}87^2 = 0{,}51$$

Variáveis aleatórias discretas

Considere o lançamento de três moedas. Se ocorre o evento CCC, dizemos que temos uma *sequência*, ao passo que se ocorre o evento CRC temos três *sequências*. Defina a variável aleatória $X =$ número de caras obtidas e $Y =$ número de sequências, isso para cada resultado possível. Assim, $X(CRR) = 1$ e $Y(CRR) = 2$. Obtenha as distribuições de X e Y. Calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 139.

Variáveis aleatórias discretas

A seguinte tabela denota as configurações que podem ser sorteadas, seu respectivo valor de X, de Y, e a probabilidade da configuração (mas note que $P(X = x) = \sum_{\omega} P(\omega : X(\omega) = x)$, onde ω são as configurações).

ω	X	Y	$P(\omega)$
CCC	3	1	0,125
CCR	2	2	0,125
CRC	2	3	0,125
RCC	2	2	0,125
RRC	1	2	0,125
RCR	1	3	0,125
CRR	1	2	0,125
RRR	0	1	0,125

Variáveis aleatórias discretas

Basta agora somar as probabilidades na tabela anterior para obtermos a distribuição de X e Y.

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	0,125	0,375	0,375	0,125

y	1	2	3
$p_Y(y)$	0,25	0,50	0,25

Variáveis aleatórias discretas

Para encontrar a esperança das variáveis aleatórias, aplicamos a definição:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i * p_X(x_i)$$

E portanto

$$\mathbb{E}(X) = 0{,}375 + 2 * 0{,}375 + 3 * 0{,}125 = 1{,}5$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0{,}25 + 2 * 0{,}50 + 3 * 0{,}25 = 2$$

Variáveis aleatórias discretas

Para encontrar a variância das variáveis aleatórias, podemos utilizar a fórmula:

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2$$

Calculamos para isso os respectivos segundos momentos:

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0{,}375 + 4 * 0{,}375 + 9 * 0{,}125 = 3$$

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right) = 0{,}25 + 4 * 0{,}50 + 9 * 0{,}25 = 4{,}5$$

E obtemos $\mathrm{Var}(X) = 0{,}75$ e $\mathrm{Var}(Y) = 0{,}5$.

Variáveis aleatórias discretas

Calcule a função de distribuição acumulada da variável aleatória Y e faça seu gráfico. *Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica 5^a edição, pág 140.

Pela definição, a f.d.a de Y é dada por $F_Y(y) = P(Y \leq y) =$

$$= \sum_{y_i \leq y} p(y_i)$$

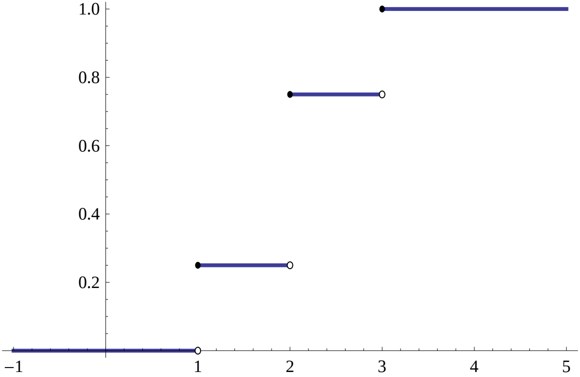
Variáveis aleatórias discretas

Consultando a tabela anterior, obtemos:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y < 1 \\ 0{,}25 & \text{se} \quad 1 \leq y < 2 \\ 0{,}75 & \text{se} \quad 2 \leq y < 3 \\ 1 & \text{se} \quad y \geq 3 \end{cases}$$

Variáveis aleatórias discretas

O gráfico da função acumulada é dado por:



Variáveis aleatórias discretas

O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

t	2	3	4	5	6	7
p(t)	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

(a) Calcule o tempo médio de processamento.

(b) Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de \$2,00 mas, se ele processa a peça em menos de seis minutos, ganha \$0,50 em cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, ganha a quantia adicional de \$1,00. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a. G: quantia em \$ ganha por peça.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 140.

Variáveis aleatórias discretas

(a) $\mathbb{E}(T) = \sum_{t=2}^{7} tP(T = t) = 2 * 0{,}1 + 3 * 0{,}1 + 4 * 0{,}3 + 5 * 0{,}2$
$+6 * 0{,}2 + 7 * 0{,}1 = 4{,}6$

(b) Podemos trocar os valores na tabela do tempo, pelo total ganho por peça; note, contudo, que o operário receberá \$2,00 no evento $\{T = 6\} \cup \{T = 7\}$, logo somamos suas probabilidades. Seja S a v.a. "ganho final".

s	\$ 4,00	\$ 3,50	\$ 3,00	\$ 2,50	\$ 2,00
p(s)	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3

Variáveis aleatórias discretas

Obtemos a média e a variância de S através da definição:

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{s} sP(S = s) = 4 \cdot 0{,}1 + 3{,}5 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 + 2{,}5 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 = 2{,}75$$

$$\mathbb{E}\left(S^2\right) = \sum_{s} s^2 P(S = s) = 16 \cdot 0{,}1 + 12{,}25 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}3 + 6{,}25 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 =$$

$$= 7{,}975$$

$$\text{Var}\,(S) = 7{,}975 - (2{,}75)^2 = 0{,}4125$$

Variáveis aleatórias discretas

Obtenha a função de distribuição acumulada da v.a. T.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 140.

A função é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 2 \\ 0{,}1 & \text{se} \quad 2 \leq t < 3 \\ 0{,}2 & \text{se} \quad 3 \leq t < 4 \\ 0{,}5 & \text{se} \quad 4 \leq t < 5 \\ 0{,}7 & \text{se} \quad 5 \leq t < 6 \\ 0{,}9 & \text{se} \quad 6 \leq t < 7 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 7 \end{cases}$$

Variáveis aleatórias discretas

O gráfico da função acumulada é dado por: