Aula de Exercícios - Esperança e Variância

Organização: Rafael Tovar *Digitação*: Guilherme Ludwig

Primeiro Exemplo - Controle de Qualidade

Controle de Qualidade

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 tubos extraídos sejam defeituosos?

Se X denotar a variável "número de tubos defeituosos em 10 extrações independentes e aleatórias", qual o seu valor esperado? Qual a variância?

Primeiro Exemplo - Controle de Qualidade

Note que a variável aleatória $X =$ número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros $n = 10$ e $p = 0{,}2$. Portanto, "não mais do que dois tubos defeituosos" é o evento $\{X \leq 2\}$. Sabemos que, para $X \sim b(10\ ,\ 0{,}2)$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} 0{,}2^x (1 - 0{,}2)^{10-x}$$

e que

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$(1 - 0{,}2)^{10} + 10 \times 0{,}2(1 - 0{,}2)^9 + 45 \times 0{,}2^2(1 - 0{,}2)^8 = 0{,}6778$$

Primeiro Exemplo - Controle de Qualidade

Se $X \sim b(n, p)$, então

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Basta então aplicar os valores fornecidos para vermos que o número esperado de tubos defeituosos num experimento com 10 extrações é de 2, e que a variância é de 1,6.

Primeiro Exemplo - Controle de Qualidade

Controle de Qualidade (cont.)

Quando se encontram quatro ou mais tubos defeituosos, o processo de produção é interrompido para revisão. Qual é a probabilidade que isto aconteça?

A probabilidade é dada por
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}879 = 0{,}121.$

Segundo Exemplo - Demanda de Serviço

Demanda de Serviço

O número de clientes X que enchem o tanque de gasolina em um dia qualquer da semana, entre as 8:00 e 18:00, é em media 68. Assuma que neste intervalo de tempo, X tem distribuição Poisson. Calcule $\mathbb{E}(X)$, Var(X) e $P(X > 5|1 \text{ hora})$.

Segundo Exemplo - Demanda de Serviço

Repare que durante um certo período de tempo, eventos deste tipo tem distribuição de Poisson com taxa λt, onde t é o comprimento do intervalo de tempo do experimento. No nosso caso, $t = 10$.

Como para $X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, temos que $\mathbb{E}(X) = \lambda t$ e $\text{Var}(X) = \lambda t$, então do enunciado do exercício vemos que $\lambda t = 68$ e $t = 10$, portanto a taxa é $\lambda = 6{,}8$.

Segundo Exemplo - Demanda de Serviço

Como já foi dito, em 10 horas de funcionamento, o número esperado de clientes que enchem o tanque é de 68, e também a variância é de 68.

O número de clientes que enchem o tanque em apenas uma hora tem distribuição Poisson(6,8). Então

$$P(X > 5|t = 1) = 1 - P(X \leq 5|t = 1) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-6,8} 6,8^x}{x!} = 0,673$$

Segundo Exemplo - Demanda de Serviço

Demanda de Serviço

Suponha que o dono do posto de gasolina quer decidir entre colocar uma nova bomba de gasolina ou não. Ele irá decidir a favor da nova bomba se em certa hora, 10 ou mais clientes usarem o posto. Qual a probabilidade que isto aconteça?

Do exercício anterior, temos que

$$P(X \geq 10|t = 1) = 1 - \sum_{x=0}^{9} \frac{e^{-6{,}8} 6{,}8^x}{x!} = 0{,}1498$$

Distribuição Hipergeométrica

Distribuição Hipergeométrica

O número de itens nãodefeituosos em n extrações sem reposição de uma população finita de tamanho N com M itens nãodefeituosos tem distribuição hipergeométrica. Sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

Repare que $n < N$, e no caso em que $N \to \infty$ e $\frac{M}{N} \to p$, X se aproxima da distribuição binomial.

Terceiro Exemplo - Qualidade de Reagentes

Qualidade de Reagentes

O inspetor de qualidade de um laboratório clínico recebe um lote grande de reagentes que, segundo o fabricante, não contém mais do que 5% de produtos defeituosos. O inspetor toma uma amostra de 10 produtos e decide rejeitar o lote completo se a amostra tem pelo menos um reagente defeituoso. Qual a probabilidade de rejeitar o lote? E se o lote, ao invés de ser "grande", tiver apenas 80 reagentes?

Terceiro Exemplo - Qualidade de Reagentes

Se o tamanho do lote é "grande" e a proporção de itens defeituosos é de 5%, então o número de reagentes defeituosos numa amostra aleatória simples de 10 reagentes tem distribuição binomial, com parâmetros $n = 10$ e $p = 0{,}05$.

Nesse caso, a probabilidade do inspetor rejeitar um lote dentro das especificações do fabricante é dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^{10} = 0{,}4012$$

Terceiro Exemplo - Qualidade de Reagentes

Se o tamanho do lote é de 80 unidades, então 5% de reagentes defeituosos representam 4 reagentes defeituosos no lote. O número de reagentes defeituosos numa amostra de $n = 10$ reagentes tem distribuição hipergeométrica, com parâmetros $n = 10$, $N = 80$ e $M = 4$. Nesse caso, a probabilidade de rejeitar um lote dentro das especificações do fabricante é dada por

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{76}{10}}{\binom{80}{10}} = 0{,}4202$$