Aula de Exercícios - Variáveis Aleatórias Discretas

Organização: Airton Kist *Digitação*: Guilherme Ludwig

O Conceito de Variável Aleatória Discreta: Um Exemplo

Um empresário pretende estabelecer uma firma para montagem de um produto composto de uma esfera e um cilindro. As partes são adquiridas em fábricas diferentes (A e B), e a montagem consiste em juntar as duas peças e pintá-las. O produto acabado deve ter o comprimento (definido pelo cilindro) e a espessura (definida pela esfera) dentro de certos limites, e isso só pode ser verificado após a montagem.

O empresário deseja estudar a viabilidade do seu empreendimento tendo uma idéia do lucro por peça montada.

O Conceito de Variável Aleatória Discreta: Um Exemplo

Sabe-se que cada componente pode ser classificado como bom, longo ou curto, conforme sua medida esteja fora da especificação. Cada componente custa $ 5,00, e as probabilidades de produção conforme as características classficatórias são conhecidas:

Produto	A (cilindro)	B (esfera)
Dentro das especificações - Bom (B)	0,80	0,70
Maior que as especificações - Longo (L)	0,10	0,20
Menor que as especificações - Curto (C)	0,10	0,10

O Conceito de Variável Aleatória Discreta: Um Exemplo

Se o produto final apresentar algum componente com a característica C (curto), ele será irrecuperável, e o conjunto será vendido como sucata ao preço de $ 5,00. Cada componente longo poderá ser recuperado a um custo adicional de $ 5,00.

Se o preço da venda de cada unidade for $ 25,00, como seria a distribuição de frequências da variável aleatória X: lucro por conjunto montado?

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 129.

O Espaço Amostral

Como os componentes vem de fábricas diferentes, é razoável supor que a classficação dos cilindros e das esferas, segundo suas características, sejam eventos independentes.

A enumeração dos pares possíveis é dada por:

$$\Omega = \{B_cB_e, B_cL_e, B_cC_e, L_cB_e, L_cL_e, L_cC_e, C_cB_e, C_cL_e, C_cC_e\}$$

Onde a primeira letra representa a classificação do cilindro, e a segunda a da esfera.

Probabilidade dos eventos

Como temos independência, sabemos que, por exemplo, $P(B_c B_e) = P(B_c)P(B_e)$.

Além disso, sabemos que o lucro será de \$ 15,00 na ocorrência do evento $B_c B_e$ (\$ 25,00 pela venda da peça, -\$ 10,00 pelo custo das mesmas), \$ 10,00 na ocorrência do evento $B_c L_e$ (\$ 25,00 pela venda da peça, -\$ 5,00 pelo reparo da esfera "Longa", -\$ 10,00 pelo custo das mesmas), e assim por diante.

Probabilidade dos eventos

Produto	Probabilidade	Lucro por montagem (X)
$B_c B_e$	$0{,}8 * 0{,}7 = 0{,}56$	15
$B_c L_e$	$0{,}8 * 0{,}2 = 0{,}16$	10
$B_c C_e$	$0{,}8 * 0{,}1 = 0{,}08$	-5
$L_c B_e$	$0{,}1 * 0{,}7 = 0{,}07$	10
$L_c L_e$	$0{,}1 * 0{,}2 = 0{,}02$	5
$L_c C_e$	$0{,}1 * 0{,}1 = 0{,}01$	-5
$C_c B_e$	$0{,}1 * 0{,}7 = 0{,}07$	-5
$C_c L_e$	$0{,}1 * 0{,}2 = 0{,}02$	-5
$C_c C_e$	$0{,}1 * 0{,}1 = 0{,}01$	-5

Probabilidade de $X = x$

Note agora que X, o lucro por conjunto montado, pode assumir os seguintes valores:

$$\begin{array}{rcl}
15, \text{ se ocorrer o evento } A_1 & = & \{B_c B_e\}; \\
10, \text{ se ocorrer o evento } A_2 & = & \{B_c L_e, L_c B_e\}; \\
5, \text{ se ocorrer o evento } A_3 & = & \{L_c L_e\}; \\
\text{-}5, \text{ se ocorrer o evento } A_4 & = & \{B_c C_e, L_c C_e, C_c B_e, C_c L_e, C_c C_e, \};
\end{array}$$

E que associadas a esses eventos, temos as probabilidades:

$$\begin{array}{ll}
P(A_1) = 0{,}56, & P(A_2) = 0{,}23 \\
P(A_3) = 0{,}02, & P(A_4) = 0{,}19
\end{array}$$

Probabilidade de $X = x$

Finalmente podemos construir a função $p(x)$, a *função de probabilidade* da variável aleatória X.

x	p(x)
15	0,56
10	0,23
5	0,02
-5	0,19
Total	1,00

Função de Probabilidade

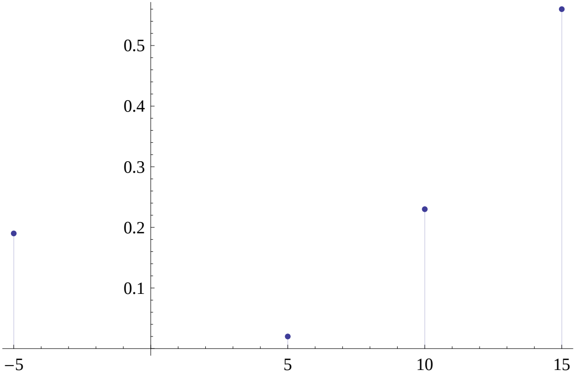

Figura: Função de probabilidade para a variável aleatória X

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Suponha que o empresário faça a seguinte pergunta: "Qual o lucro médio por conjunto montado que espero conseguir?".

A definição de valor médio, ou esperança matemática, da variável aleatória X que assume valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Para saber o lucro médio do empresário, basta aplicar a fórmula:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 15 * P(X = 15) + 10 * P(X = 10) \\ &\quad + 5 * P(X = 5) - 5 * P(X = -5) \\ &= 15 * 0{,}56 + 10 * 0{,}23 + 5 * 0{,}02 - 5 * 0{,}19 = 9{,}85\end{aligned}$$

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Chamamos *Variância* da variável aleatória X o valor.

$$\mathrm{Var}\,(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathbb{E}\,(X)]^2 P(X = x_i)$$

E o desvio-padrão de X, $\mathrm{DP}\,(X)$, é a raiz quadrada da variância.

No caso do empresário, temos $\mathrm{Var}\,(X) = 57{,}23$ e $\mathrm{DP}\,(X) = 7{,}57$.

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Podemos encontrar o valor esperado de funções de variáveis aleatórias. Imagine que os preços e custos determinados pelo empresário estivessem errados: todos os valores deveriam ter sido duplicados. Temos aí uma transformação $Z = 2X$. Z tem a seguinte distribuição:

x	$z = 2x$	$p(z) = p(x)$	$z * p(z)$
15	30	0,56	16,80
10	20	0,23	4,60
5	10	0,02	0,20
-5	-10	0,19	$-1{,}90$
Total	-	1,00	19,70

E, portanto, $\mathbb{E}(Z) = 19{,}70$.

Valor Médio de uma Variável Aleatória

Se, por outro lado, estamos interessados em $W = X^2$, devemos notar que o evento $\{W = 25\}$ ocorre quando temos $\{X = 5\}$ ou $\{X = -5\}$, e aí $P(W = 25) = P(X = 5) + P(X = -5)$ $= 0{,}02 + 0{,}19 = 0{,}21$:

x	$w = x^2$	$p(w)$	$w * p(w)$
15	225	0,56	126,00
10	100	0,23	23,00
5 ou -5	25	0,21	5,25
Total	-	1,00	154,25

E, portanto, $\mathbb{E}\,(W) = 154{,}25$.

Função de Distribuição Acumulada

Dada a variável aleatória X, chamaremos de função de distribuição acumulada (f.d.a) $F(x)$ à função

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Observe que o domínio de F é o conjunto dos números reais, ao passo que o contradomínio é o intervalo $[0, 1]$.

Função de Distribuição Acumulada

No problema do empresário, usando a função de probabilidade obtida anteriormente, obtemos a f.d.a de X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < -5 \\ 0{,}19 & \text{se} \quad -5 \leq x < 5 \\ 0{,}21 & \text{se} \quad 5 \leq x < 10 \\ 0{,}44 & \text{se} \quad 10 \leq x < 15 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 15 \end{cases}$$

Função de Distribuição Acumulada

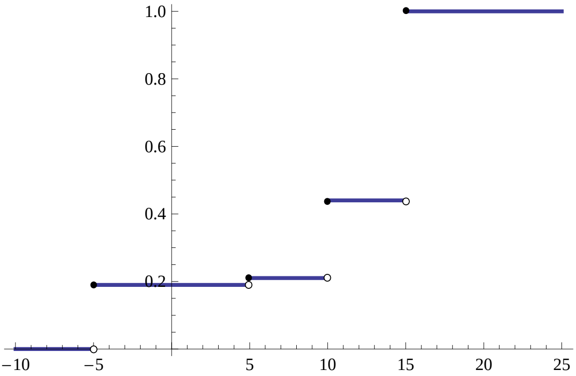

Figura: F.d.a. para a variável aleatória X

Moda e Mediana de X

Podemos considerar outras medidas de localizaao além da média para a variável aleatória X.

- A *mediana* de X é o valor de X que acumula 0,50 de probabilidade. Observe que $F(x)$ em -5 é 0,19; em 5, é 0,21; e em 10, é 0,44. $F(x)$ acumula 0,50 portanto em 15, e $\text{Mediana}(X) = 15$.
- A *moda* de X é o valor mais provável; no caso, $P(X = 15) = 0{,}56$, portanto $\text{Moda}(X) = 15$.