Aula de Exercícios - Probabilidade

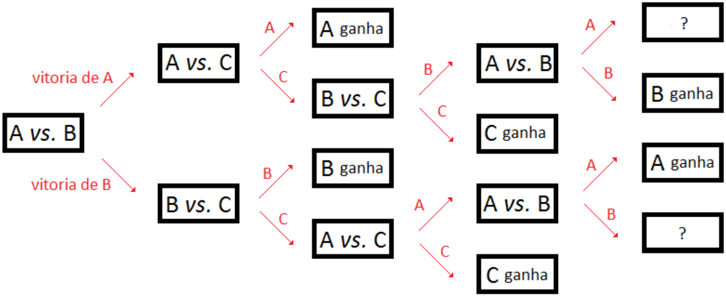
Organização: Airton Kist *Digitação*: Guilherme Ludwig

Probabilidade - Introdução

Três jogadores **A**, **B** e **C** disputam um torneio de tênis. Inicialmente, **A** joga com **B** e o vencedor joga com **C**, e assim por diante. O torneio termina quando um jogador ganha duas vezes seguidas ou quando são disputadas, ao todo, quatro partidas. Quais são os resultados possíveis do torneio?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 105.

Probabilidade - Introdução

Considere o organograma:



Probabilidade - Introdução

Com a ajuda do organograma, podemos dizer que são possíveis os eventos AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA e BCAB.

Aí, temos que

$$\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$$

Probabilidade - Introdução

Uma moeda e um dado são lançados. Dê o espaço amostral do experimento e depois represente-o como produto cartesiano dos dois espaços amostrais, correspondente aos experimentos considerados individualmente.
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 106.

Probabilidade - Introdução

O *espaço amostral* Ω consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento em questão.

O experimento *jogar uma moeda* tem dois resultados possíveis: cara (C) e coroa $(\bar{C})$. Logo, o espaço amostral é $\Omega_1 = \{C, \bar{C}\}$.

Probabilidade - Introdução

O experimento *jogar um dado* tem seis resultados possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Logo, o espaço amostral é $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O produto cartesiano $\Omega_1 \times \Omega_2$ é o espaço amostral do experimento *jogar uma moeda e um dado*, ou seja,

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{&(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),\\ &(\bar{C},1),(\bar{C},2),(\bar{C},3),(\bar{C},4),(\bar{C},5),(\bar{C},6)\} \end{aligned}$$

Probabilidade - Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios:

(i) Numa linha de produção, conta-se o número de peças defeituosas num intervalo de uma hora.

(ii) Investigam-se famílias com três crianças, anotando-se a configuração segundo o sexo.

(iii) Numa entrevista telefônica com 250 assinantes, anota-se se o proprietário tem ou não máquina de secar roupa.

(iv) Mede-se a duração de lâmpadas, deixando-as acesas até que se queimem.

Probabilidade - Exercício

Defina o espaço amostral dos seguintes experimentos aleatórios (continuação):

(v) De um grupo de cinco pessoas (A,B,C,D,E), sorteiam-se duas, uma após a outra, com reposição, e anota-se a configura, ao tomada.

(vi) Mesmo que (v), mas sem reposição.

(vii) Mesmo que (v), mas os dois selecionados simultaneamente.

Probabilidade - Algumas Propriedades

Considere novamente o jogo de tênis entre **A**, **B** e **C**. Temos que $\Omega = \{AA, BB, ACC, BCC, ACBA, ACBB, BCAA, BCAB\}$, e $P(AA) = 1/4$, por exemplo.

(a) *Mostre que a soma das probabilidades dos pontos do espaço amostral é 1.*
$P(AA) + P(BB) + P(ACC) + P(BCC) + P(ACBA) + P(ACBB) + P(BCAA) + P(BCAB) =$
$= 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 = 1$

Probabilidade - Algumas Propriedades

(b) *Qual a probabilidade que A vença? Qual a probabilidade que B vença?*
P(A vencer) $= P(AA) + P(BCAA) = 1/4 + 1/16 = 5/16 =$ 0,3125. De modo análogo, P(B vencer) $=$ $P(BB) + P(ACBB) = 1/4 + 1/16 = 5/16 = 0{,}3125$.

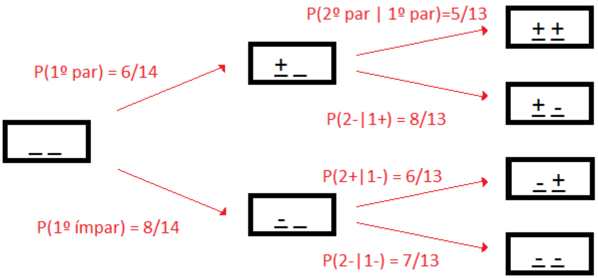
(c) *Qual a probabilidade que não haja decisão?*
P(não haver decisão) $= P(ACBA) + P(BCAB) = 2/16 =$ 0,125.

Probabilidade - Algumas Propriedades

Dentre seis números positivos e oito negativos, dois números são escolhidos ao acaso (sem reposição) e multiplicados. Qual a probabilidade que o produto seja positivo?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 110.

Probabilidade - Algumas Propriedades

Como não temos reposição, podemos usar um organograma:



Probabilidade - Algumas Propriedades

Com a ajuda do diagrama, observamos que:

$$P(++) = \frac{6}{14}\frac{5}{13} = \frac{15}{91}, \; P(+-) = \frac{6}{14}\frac{8}{13} = \frac{24}{91}$$

$$P(-+) = \frac{8}{14}\frac{6}{13} = \frac{24}{91}, \; P(--) = \frac{8}{14}\frac{7}{13} = \frac{4}{13}$$

Como queremos que o produto dos dois números seja positivo, queremos $++$ ou $--$, e então temos uma probabilidade igual a $43/91$, ou aproximadamente 47,25%.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Considere os seguintes eventos:

H: freguês é homem	**A**: prefere salada
M: freguês é mulher	**B**: prefere carne

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 122.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Devemos "traduzir" os dados do enunciado em eventos:

(i) "20% *dos fregueses do sexo masculino preferem a salada*" diz que o evento $A|H$ tem probabilidade $P(A|H) = 0{,}20$. Observe que então $P(A^c|H) = P(B|H) = 0{,}80 = 1 - P(A|H)$, ou seja, 80% dos homens preferem carne.

(ii) De modo análogo, "30% *das mulheres escolhem carne*" diz que o evento $B|M$ tem probabilidade $P(B|M) = 0{,}30$.

(iii) "75% *dos fregueses são homens*" nos diz que o evento H tem $P(H) = 0{,}75$.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Podemos colocar os dados em uma tabela, e completá-la evocando as seguintes propriedades:

(i) Se $P(A|H) = P(A \cap H)/P(H)$, então $P(A \cap H) = P(A|H)P(H)$. Isso quer dizer que a probabilidade da intersecção dos eventos "cliente gosta de salada" com "cliente é homem" tem probabilidade igual a 20%*75% $=$ 15%.

(ii) $P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|M)P(M)$. Ou seja, $P(A) = 20\% * 75\% + 70\% * 25\% = 32{,}5\%$. A probabilidade de um cliente gostar de salada é de 32,5%.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Completando a tabela...

	Salada	Carne	Total
Homem	15%	60%	75%
Mulher	17,5%	7,5%	25%
Total	32,5%	67,5%	

Probabilidade - Teorema de Bayes

Basta agora consultar a tabela:

(a) *Calcular* $P(H)$, $P(A|H)$ *e* $P(B|M)$
$P(H) = 75\%$, $P(A|H) = 20\%$ e $P(B|M) = 30\%$. Todas essas são probabilidades informadas no enunciado.

(b) *Calcular* $P(A \cap H)$ *e* $P(A \cup H)$
$P(A \cap H) = P(A|H)P(H) = 20\% * 75\% = 15\%$,
$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) =$
$32{,}5\% + 75\% - 15\% = 62{,}5\%$

(c) *Calcular* $P(M|A)$

$$P(M|A) = P(A|M)\frac{P(M)}{P(A)} = 70\%\frac{25\%}{32{,}5\%} = 53{,}84\%.$$

Probabilidade - Teorema de Bayes

As probabilidades de três motoristas serem capazes de guiar até em casa com segurança, depois de beber, são de 1/3, 1/4 e 1/5, respectivamente. Se decidirem guiar até em casa, depois de beber numa festa, qual a probabilidade de todos os três motoristas sofrerem acidentes? Qual a probabilidade de pelo menos um dos motoristas guiar até em casa a salvo?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Considere os eventos:

A: Primeiro Motorista sofre acidente
B: Segundo Motorista sofre acidente
C: Terceiro Motorista sofre acidente

Com P(A) = 2/3, P(B) = 3/4 e P(C) = 4/5, respectivamente.
Assuma também que eles são independentes entre si.
Então P(todos sofrerem acidentes) = $P(A \cap B \cap C)$, mas pela independência, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ que é igual a 2/5.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Finalmente, qual a probabilidade de pelo menos um deles não sofrer acidente? Seja E o evento *todos os três sofrem acidente*. Então *pelo menos um não sofre acidente* é E^c. Além disso, $E = A \cap B \cap C$, e sabemos que $P(E) = 2/5$. Portanto $P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 2/5 = 3/5$.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Duas lâmpadas queimadas foram misturadas acidentalmente com seis lâmpadas boas. Se vamos testando as lâmpadas, uma por uma, até encontrar duas defeituosas, qual é a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no quarto teste?
Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 122.

Probabilidade - Teorema de Bayes

Seja Q uma lâmpada queimada e B uma lâmpada boa. Sabendo que são duas queimadas, encerramos os testes quando a segunda for encontrada. Então, o nosso espaço amostral é
$\Omega = \{QQ, QBQ, BQQ, QBBQ, BQBQ, BBQQ,$
$QBBBQ, BQBBQ, BBQBQ, BBBQQ, \ldots, BBBBBBQQ\}$

O evento *última defeituosa encontrada no quarto teste* corresponde aos eventos $\{QBBQ, BQBQ, BBQQ\}$.

Probabilidade - Teorema de Bayes

$$P(QBBQ \text{ ou } BQBQ \text{ ou } BBQQ) = P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ)$$

Mas $P(QBBQ \cup BQBQ \cup BBQQ) = P(QBBQ) + P(BQBQ) + P(BBQQ)$ pois, os eventos do tipo $QBBQ \cap BQBQ$ são impossíveis (vazios).

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(QBBQ)} &= \frac{2}{8}\frac{6}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}\\
\mathrm{P(BQBQ)} &= \frac{6}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}\\
\mathrm{P(BBQQ)} &= \frac{6}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{28}
\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathrm{P}(\textit{última defeituosa encontrada no quarto teste}) = \frac{3}{28}$