

Aula de Exercícios - Técnicas de contagem

Organização: Rafael Tovar *Digitação:* Guilherme Ludwig

Técnicas de Contagem

Podemos fazer permutações e combinações.

- *Permutações* são os arranjos de elementos em que se tem em conta a ordem com que são tomados. Com a permutação sabemos de quantas formas podemos obter uma amostra de tamanho n , de uma população com tamanho N .

$${}_N P_n = \frac{N!}{(N - n)!}$$

Se temos sub-populações n_1, n_2, \dots, n_k tal que $\sum_{i=1}^k n_i = N$, então

$${}_N P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Técnicas de Contagem

- *Combinações* são arranjos que não consideram a ordem dos elementos. Se queremos ter amostras sem repetição, temos:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\binom{n}{r}$ também pode ser denotado por $C(n, k)$ ou C_k^n .

Podemos fazer combinações com elementos repetidos, também. Nesse caso, $C_r(n, k) = C(m + k - 1, k)$.

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Suponha que temos uma população com $N = 6$ elementos e queremos sortear amostras de tamanho 2. Vamos considerar as seguintes maneiras de sorteio:

- 1 Com ordem e repetição
- 2 Com ordem e sem repetição
- 3 Sem ordem e com repetição
- 4 Sem ordem e sem repetição
- 5 Só repetição

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 1: Com ordem e com repetição é quando sorteamos, por exemplo, duas vezes seguidas. Temos $6 * 6 = 36$ possibilidades.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 2: Se queremos a amostra com ordem e repetições, temos ${}_6P_4 = \frac{6!}{4!} = 30$ possibilidades.

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)		(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)		(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)		(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)		(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 3: Se queremos a amostra sem ordem, mas com repetições, temos $C_r(6, 2) = \binom{6+2-1}{2} = 21$ possibilidades.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,4)	(4,5)	(4,6)
				(5,5)	(5,6)
					(6,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 4: Se queremos a amostra sem ordem e sem repetições, temos $C(6, 2) = \binom{6}{2} = 15$ possibilidades.

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,5)	(4,6)
				(5,6)

Técnicas de Contagem - Um Exemplo

Caso 5: Se só queremos repetições, temos somente 6 possibilidades.

(1,1)

(2,2)

(3,3)

(4,4)

(5,5)

(6,6)