

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

- Consideremos uma população em que a proporção de indivíduos portadores de uma certa característica é p .
- Colhida uma amostra casual simples de indivíduos, podemos construir

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo } i \text{ possui a característica} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\Rightarrow X_i \sim \text{ber}(p); i = 1, 2, \dots, n$
- Se os indivíduos são independentes: $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

- $\hat{p} = \frac{S_n}{n}$ é uma média amostral

- Utilizando a distribuição exata (n pequeno)

$$P(\hat{p} = \frac{k}{n}) = P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) = P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

- Utilizando a aproximação para a Normal (n grande)

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

- **Exemplo:** Se p for a proporção de fumantes no estado de SP, $p = 0.2$ e tivermos coletado uma amostra casual simples de 500 indivíduos

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo } i \text{ é fumante} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{500} X_i}{500}$
- $\hat{p} \sim N\left(0.2, \frac{0.2 \times 0.8}{500}\right) = N(0.2, 0.00032)$
- $P(\hat{p} \leq 0.25) = P(Z \leq 2.795) = \Phi(2.795) = 0.9974$

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

- $\hat{p} = \frac{S_n}{n} \Rightarrow S_n = n\hat{p}$
- Quando n é grande o suficiente $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$
- Qual a distribuição de S_n quando n é grande o suficiente?

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

■ Propriedade:

- $X \sim N(a, b)$
- $Y = \alpha X + \beta$
- $\Rightarrow Y \sim N(\alpha a + \beta, \alpha^2 b)$

■ Aplicação:

- $S_n = X_1 + \dots + X_n$
- $\hat{p} = \frac{S_n}{n} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$
- $S_n = n\hat{p} \sim N(np, np(1-p))$

■ Portanto: $Bin(n, p) \approx N(np, np(1-p))$ quando n é grande

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

- **Exemplo:** $X \sim \text{Bin}(100, 0.4)$
 - $E(X) = 100 \times 0.4 = 40$
 - $\text{Var}(X) = 100 \times 0.4 \times 0.6 = 24$
 - $X \approx N(40, 24)$
 - $P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \frac{50-40}{\sqrt{24}}\right) \approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{24}}\right) = \Phi(2.04) \approx 0.9793$

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

- $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- n suficientemente grande, $X \sim N(np, np(1-p))$
- $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0, 1)$
- $\gamma = 0.95$ é o grau de confiança

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

$$\begin{aligned}0.95 &= P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\&= P\left(-1.96 \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1.96\right) \\&= P\left(-1.96\sqrt{np(1-p)} \leq X - np \leq 1.96\sqrt{np(1-p)}\right) \\&= P\left(\frac{-1.96\sqrt{np(1-p)}}{n} \leq \frac{X - np}{n} \leq \frac{1.96\sqrt{np(1-p)}}{n}\right) \\&= P\left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)\end{aligned}$$

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

- p é desconhecido

- $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

- $\Rightarrow \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{4n}}$

- $\Rightarrow -\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \geq -\sqrt{\frac{1}{4n}}$

- $0.95 \approx P\left(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}\right)$

- Caso geral:

$$\left[\hat{p} - z_\gamma\sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + z_\gamma\sqrt{\frac{1}{4n}}\right] \text{ é um IC de } \gamma \times 100\% \text{ para } p$$

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

- **Exemplo:** Numa pesquisa de mercado, $n = 400$ pessoas foram entrevistadas sobre determinado produto, e 60% destas pessoas preferiam a marca A. $\hat{p} = 0.6$, logo, o IC com grau de confiança $\gamma = 0.95$ é dado por:

$$\left[0.6 - 1.96 \frac{1}{\sqrt{1600}}; 0.6 + 1.96 \frac{1}{\sqrt{1600}} \right] = [0.551; 0.649]$$

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

- **Exemplo:** Suponha que em $n = 400$ provas, obtemos $k = 80$ sucesso. Vamos obter um intervalo de confiança para p , com $\gamma = 0.9$:

- $\hat{p} = \frac{80}{400} = 0.2$

- $z_{0.9} = 1.645$

$$\left[0.2 - 1.645 \frac{1}{\sqrt{1600}}; 0.2 + 1.645 \frac{1}{\sqrt{1600}} \right] = [0.159; 0.2411]$$

- Usando \hat{p}

$$\left[\hat{p} - z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right] = [0.167; 0.233]$$

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

- O intervalo que utiliza \hat{p} como estimativa tem menor amplitude do que o intervalo que utiliza $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$
 - [0.159; 0.2411]: $0.2411 - 0.159 = 0.082$
 - [0.167; 0.233]: $0.233 - 0.167 = 0.066$
- Finalmente, os intervalos de confiança para p podem então ser de duas formas:

$$I_1 = \left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{1}{4n}} \right]$$

$$I_2 = \left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

- z_γ é tal que $\gamma = P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma)$; $Z \sim N(0, 1)$
- Como determinar então, z_γ ?

$$\begin{aligned}\gamma &= P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = P(Z \leq Z_\gamma) - P(Z \leq -Z_\gamma) \\ &= P(Z \leq Z_\gamma) - P(Z \geq Z_\gamma) = P(Z \leq Z_\gamma) - [1 - P(Z \leq Z_\gamma)] \\ &= 2P(Z \leq Z_\gamma) - 1 = 2\Phi(Z_\gamma) - 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma + 1}{2} = \Phi(z_\gamma)$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) = z_\gamma$$