

A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano e a Teoria de Pauli

Jayme Vaz Jr.

Departamento de Matemática Aplicada - IMECC

Universidade Estadual de Campinas

CP 6065, 13081-970, Campinas, S.P., Brazil

E-mail: vaz@ime.unicamp.br

Trabalho recebido em 5 de fevereiro de 1996

Nesse artigo discutimos sob um ponto de vista geométrico a teoria não-relativística do elétron, dentro do contexto da chamada teoria de Pauli. Introduzimos e discutimos o conceito de *spinor* de Pauli através do que chamamos álgebra geométrica, no caso do espaço euclidiano tridimensional. Mostramos como esta álgebra introduzida por Clifford sintetiza e unifica os quatérnions de Hamilton e a álgebra de extensão de Grassmann, e discutimos a sua relação com a álgebra vetorial de Gibbs, mostrando que esta última apresenta sérias incoerências. O conceito de *spinor* aparece dentro da álgebra geométrica com uma clara interpretação geométrica, o que nos permite esclarecer várias questões relacionadas a este objeto, em particular a questão da transformação ativa. Finalmente, mostramos como escrever a equação de Pauli na álgebra geométrica, e deduzimos dessa equação algumas importantes relações entre observáveis, em particular a expressão para o chamado potencial quântico.

I. Introdução

Os fundamentos da Mecânica Quântica (MQ) sempre se mostraram um assunto fascinante e intrigante. Longe de uma palavra final, os problemas de fundamentos permanecem, e inclusive provocaram controvérsias mesmo entre os fundadores da MQ. No que se refere aos fundamentos da MQ, a quase totalidade das questões é introduzida e discutida, pelo menos nos livros-texto padrões, dentro do que chamaremos teoria de Schrödinger. A própria discussão da teoria de Schrödinger emerge após uma análise de problemas tais como a lei de radiação de Planck, o efeito fotoelétrico, o átomo de Bohr, etc, seguindo uma linha histórica.

Por outro lado, tão importante quanto as experiências e fatos que levaram à formulação da teoria de Schrödinger foi a experiência de Stern & Gerlach. A conclusão que hoje tiramos da experiência de Stern & Gerlach é que a teoria de Schrödinger é *incompleta*. Para levarmos em consideração o grau de liberdade denominado *spin* devemos considerar a teoria de Pauli, onde substituímos uma função complexa (a

função de onda) por um objeto chamado campo *spinorial* e a equação de Schrödinger pela chamada equação de Pauli. A experiência de Stern & Gerlach sem dúvida nos mostra a inadequação de certos conceitos clássicos, e por isso mesmo é tomada como ponto de partida em certos textos modernos [1].

O fato é que a teoria de Pauli é apenas superficialmente discutida dentro da literatura padrão da MQ. Se nos permitirmos à uma pequena especulação, talvez a origem desse “esquecimento” da teoria de Pauli tenha sido o advento da teoria de Dirac. O mérito da teoria de Dirac é inegável, mas o que ocorre é que uma vez sendo uma teoria relativística e por naturalmente se utilizar do conceito de *spinor* ela sugere interpretações completamente equivocadas como a que o “*spin* é um grau de liberdade de origem relativística”.

Os equívocos com relação à interpretação do que é *spin* não se limitam, entretanto, ao referido acima. Uma vez que as teorias de Pauli e de Dirac se utilizam de um objeto matemático chamado *spinor*, que em nenhum momento aparece nas apresentações usuais da Mecânica Clássica, sugere-se também equivo-

cadamente que o “*spin* é um grau de liberdade sem análogo clássico”. De fato, hoje conhecemos vários modelos clássicos de partículas com *spin* [2]. Além disso, a nomenclatura não apenas “não ajuda”, mas sobretudo “atrapalha”. Não devemos pensar, como esperamos mostrar nesse artigo, que há alguma relação *a priori* entre *spin* e *spinor*. Esse é um equívoco muito maior do ponto de vista físico do que matemático.

No que se refere ao que chamamos *spin* hoje sabemos que o seu aspecto verdadeiramente “não-clássico” está relacionado com o chamado teorema *spin* – estatística, ou seja, partículas com *spin* semi-inteiro obedecem à estatística de Fermi-Dirac e partículas com *spin* inteiro obedecem à estatística de Bose-Einstein. No que se refere ao *spin* dentro de teorias de “primeira quantização” como as de Pauli ou de Dirac, o que podemos realmente dizer, se formos honestos, é que ainda sabemos pouco, ou quase nada, acerca do seu significado.

Talvez a origem dos equívocos mencionados acima, para não dizer de outros que não discutiremos, esteja no pouco conhecimento de uma Matemática que remonta ao século passado. Isso não nos deve causar surpresa uma vez que mesmo a teoria de matrizes era pouco conhecida dos físicos quando do advento da MQ, o que provavelmente levou à uma certa preferência pela teoria de Schrödinger sobre a equivalente Mecânica das matrizes de Born, Heisenberg e Jordan. A Matemática a que estamos nos referindo emergiu no ano de 1844 através dos trabalhos de Hamilton e Grassmann. Naquele ano Hamilton introduziu os chamados *quatérnions*, enquanto Grassmann introduziu a *álgebra de extensão* [Ausdehnungslehre].

À primeira vista não havia nenhuma relação aparente entre os trabalhos de Hamilton e Grassmann. Além disso, Hamilton já era um matemático famoso naquele tempo, o que contribuiu para que uma grande atenção fosse dada aos quatérnions, enquanto o trabalho de Grassmann permanecia em uma relativa obscuridade. Os quatérnions constituem-se em uma generalização dos números complexos, de modo que enquanto os complexos mostram-se um sistema adequado aos problemas envolvendo o plano euclídeo, os quatérnions mostram-se um sistema adequado aos problemas envolvendo o espaço euclídeo. Em função disso várias aplicações dos quatérnions em Mecânica e Eletromag-

netismo Clássicos se mostraram naturais e poderosas. Inclusive Maxwell, em seu famoso tratado [3], considera os quatérnions.

É fato que idéias novas quase sempre encontram uma resistência inicial, e os quatérnions não fugiram à essa regra. A disputa entre adeptos e críticos dos quatérnions não apenas não levou a nada frutífero, como também desviou a atenção do sistema de Grassmann. Aliás, foram poucos como Grassmann que entenderam o conceito de vetor no sentido em que esse objeto se define pelas relações que ele satisfaz, e não pela sua natureza em si.

Dotado desse sentido de abstração, Grassmann foi capaz de formular um sistema poderoso, elegante e geral, adequado sobretudo à descrição de geometrias afim e projetiva em espaços arbitrários. Já o sistema de Hamilton se mostrava adequado à uma geometria ortogonal – que sem dúvida é a mais importante em Física – mas apenas dentro do espaço euclídeo tridimensional. Ora, a questão natural que podemos colocar é se seria possível sintetizar as vantagens dos sistemas de Hamilton e Grassmann em um único sistema que se mostre adequado à geometria ortogonal de um espaço arbitrário.

Em 1886 Gibbs tentou unificar esses sistemas naquele hoje denominado *álgebra vetorial*. O que se seguiu foi uma divisão entre os defensores da álgebra de Gibbs de um lado e os de Hamilton do outro, e como podemos constatar em qualquer livro de Física Básica, a álgebra vetorial de Gibbs acabou se estabelecendo. Na nossa opinião, isso foi de uma grande infelicidade para a Física, sobretudo em função do advento da MQ.

Se estudarmos os trabalhos de Hamilton e de Grassmann, e daí o de Gibbs, veremos que a álgebra vetorial de Gibbs nada mais é do que um apanhado de conceitos disfarçado sobre o manto de uma notação falaciosa. A álgebra vetorial de Gibbs além de não ser uma generalização dos sistemas de Hamilton e Grassmann uma vez que só funciona no espaço tridimensional, também sofre de deficiências internas ausentes naqueles sistemas. De fato, em uma estrutura fechada, o resultado de qualquer operação sobre elementos dados deve ser um elemento da mesma estrutura, e isto não ocorre, por exemplo, com o produto vetorial dentro da álgebra de Gibbs onde o resultado do produto vetorial de dois vetores

não é um vetor, fato este remendado pela denominação pseudo-vetor ao resultado deste produto vetorial.

A verdadeira síntese e generalização dos sistemas de Hamilton e Grassmann foi obtida por Clifford em 1878, através do que ele denominou *álgebra geométrica* – e que atualmente denominamos álgebra de Clifford. É preciso observarmos, entretanto, que outros nomes haviam de uma maneira ou de outra tocado neste assunto. Em particular, podemos citar Euler, Rodrigues e Lipschitz, além dos próprios Hamilton e Grassmann, e inclusive Leibnitz. Posteriormente Pauli e Dirac introduziram essa estrutura dentro da Física.

O grande achado de Clifford foi essencialmente introduzir o análogo do produto quaterniônico dentro da estrutura da álgebra de Grassmann, obtendo assim um sistema naturalmente adaptado à geometria ortogonal de um espaço arbitrário. Além de poderosa e natural, a álgebra de Clifford não apresenta as incoerências da álgebra vetorial de Gibbs – na verdade as corrige – e traz em si conceitos adequados para a formulação da MQ. Em nossa opinião, tivessem os quatérnions, e daí a sua generalização natural que são as álgebras de Clifford, prevalecido sobre a álgebra vetorial de Gibbs, possivelmente tal teria um grande efeito sobre a nossa compreensão dos fundamentos da MQ, em particular do conceito de *spin*. Isto porque, dentre outros, nas álgebras de Clifford aparece naturalmente o conceito de *spinor*.

Seria especulação demais discutirmos questões como os motivos pelos quais a álgebra vetorial de Gibbs prevaleceu sobre os quatérnions, ou porque as álgebras de Clifford não se solidificaram na Física e Matemática tanto quanto a álgebra vetorial. Hoje o conceito de *spinor*, e portanto de álgebras de Clifford, é fundamental dentro da Física Moderna, mas ele já se faz presente no âmbito da Física Clássica. O que podemos lembrar, e que certamente está ligado à questão acima, é a fatalidade da morte precoce de Clifford um ano após (1879) o advento de suas álgebras geométricas, mesmo ano do falecimento de admiradores de seu sistema como Grassmann e Maxwell, o que sem dúvida contribuiu para dificultar a divulgação do sistema de Clifford.

O que pretendemos fazer nesse artigo é introduzir a álgebra geométrica (segundo a denominação original de Clifford) do espaço euclidiano e mostrar algumas de suas aplicações. Do ponto de vista da MQ, a principal

aplicação se faz dentro da teoria de Pauli através do conceito de *spinor* de Pauli. A escolha da álgebra do espaço euclidiano se deve à sua naturalidade e simplicidade, encontrando inúmeras aplicações já no âmbito da Física Clássica, e por apresentar o primeiro exemplo não-trivial do conceito de *spinor*. Nosso formalismo, além de unificar conceitos conhecidos e generalizá-los, os coloca sobre um ponto de vista moderno, o que permite uma melhor compreensão destes conceitos e de suas aplicações em teorias modernas como as chamadas teorias super-simétricas [4].

Organizamos este artigo da seguinte forma. Na segunda seção introduzimos e discutimos a álgebra geométrica do espaço euclidiano através de uma introdução simples e natural do produto geométrico (ou produto de Clifford). Na terceira seção discutimos a relação desta álgebra geométrica com os quatérnions e a álgebra vetorial de Gibbs. Na quarta seção introduzimos o operador “nabla” e mostramos como ele generaliza dentro da álgebra geométrica as operações gradiente, divergente e rotacional, aproveitando para escrevermos as famosas equações de Maxwell na forma de uma única equação. Na quinta seção introduzimos e discutimos o chamado grupo Spin(3), que é de fundamental importância não apenas por si só, mas também em função da discussão que faremos do *spinor* de Pauli. Na sexta seção introduzimos o conceito de *spinor*. Vamos discutir esse conceito sobre três pontos de vista diferentes e discutir a relação entre eles. É importante salientar que embora a nossa discussão se limite ao *spinor* de Pauli, a nossa formulação pode ser generalizada quase que trivialmente para casos mais gerais como por exemplo o do *spinor* de Dirac. Na sétima seção nós discutiremos a questão da transformação ativa de um *spinor* (no caso, de Pauli), introduzindo sua lei de transformação e a discutindo sob um ponto de vista geométrico. Finalmente, na oitava seção nós mostramos como escrever a equação de Pauli dentro da álgebra geométrica, e deduzimos dessa equação algumas importantes relações entre observáveis que possuem interpretações muito interessantes – em particular obtemos a expressão dentro da teoria de Pauli para o chamado potencial quântico. Nesse artigo tentamos sempre que possível evitar discussões que envolvam questões puramente “técnicas” uma vez que nosso objetivo principal

é clarificar conceitos.

II. A álgebra geométrica do espaço Euclidiano

Vamos iniciar a nossa discussão escolhendo um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 temos

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3. \quad (1)$$

O que pretendemos considerar é uma geometria ortogonal, onde sabemos que é válido o teorema de Pitágoras. Desse modo, se os vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ são unitários e ortogonais, temos

$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (2)$$

O que desejamos fazer é introduzir um produto P de vetores tal que

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2, \quad (3)$$

e daí definirmos as noções de ortogonalidade e colinearidade em termos deste produto. Por questão de conveniência, vamos exigir no momento apenas que esse produto seja bilinear, ou seja, se α e β são escalares:

$$\begin{aligned} P(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2, \mathbf{u}) &= \alpha P(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}) + \beta P(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}), \\ P(\mathbf{v}, \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2) &= \alpha P(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) + \beta P(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Introduzindo as eqs.(1) e (2) na eq.(3), e daí usando a eq.(4), obtemos

$$\begin{aligned} &v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ &= v_1^2 P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + v_2^2 P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + v_3^2 P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \\ &+ v_1 v_2 [P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)] \\ &+ v_1 v_3 [P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)] \\ &+ v_2 v_3 [P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Como o vetor \mathbf{v} é arbitrário, segue da eq.(5) que

$$P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \quad P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \quad P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= 0, \\ P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) &= 0, \\ P(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + P(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Uma solução possível para as eqs.(7) é que

$$P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = P(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = 0 \quad (i \neq j). \quad (8)$$

Na verdade esta é a única solução possível se estivermos supondo que $P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ($i \neq j$) é um escalar. Nesse caso iremos denotar o produto P por um ponto, ou seja,

$P(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, e iremos nos referir a esta escolha como “escolha de Gibbs”. Segue, da escolha de Gibbs, que

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9)$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = 0 \quad (i \neq j), \quad (10)$$

e $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Note que esse produto é justamente o chamado produto escalar. A eq.(9) nos diz que os vetores $\{\mathbf{e}_i\}$ são unitários, e a eq.(10) que os vetores \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j ($i \neq j$) são ortogonais.

Como dissemos, a escolha de Gibbs só se justifica se supormos que o resultado do produto $P(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ($i \neq j$) seja um escalar. Como *não existe* nenhuma razão *a priori* para supormos isso, temos uma outra possibilidade, que é tomarmos as próprias eqs.(6) e (8) como definindo o produto em consideração. Se denotamos, para facilitar a notação, esse produto simplesmente por justaposição, ou seja, $P(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v}\mathbf{u}$, temos então que

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = 0 \quad (i \neq j), \quad (12)$$

e $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{v}^2$. Iremos nos referir a esta escolha como “escolha de Clifford” e ao produto resultante como produto de Clifford ou produto geométrico. De maneira análoga à escolha de Gibbs, a eq.(11) nos diz que os vetores $\{\mathbf{e}_i\}$ são unitários e a eq.(12) que os vetores \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j ($i \neq j$) são ortogonais.

Dentro da escolha de Clifford temos agora que interpretar relações como $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = 0$, ou seja, interpretar a natureza de um objeto como $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$. Como já dissemos, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ não pode ser um escalar pois nesse caso só a escolha de Gibbs seria justificada. Uma outra maneira de vermos que $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ não é um escalar é notarmos que se $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ fosse um escalar α , deveríamos ter $\mathbf{v}\alpha = \alpha \mathbf{v}$, e isto não ocorre com $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, por exemplo. De fato, se tomarmos o caso particular do vetor \mathbf{e}_1 temos:

$$\mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \stackrel{(12)}{=} \mathbf{e}_2, \quad (13)$$

$$(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1 \stackrel{(13)}{=} -(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \stackrel{(12)}{=} -\mathbf{e}_2, \quad (14)$$

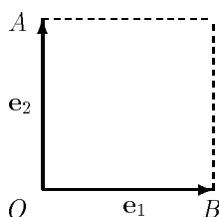
o que nos mostra que $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ não é um escalar.

Devemos notar no cálculo acima que fizemos uso de uma propriedade a qual não havíamos feito referência, a saber: *associatividade*. Iremos supor que o produto geométrico é associativo, ou seja, $\mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{w}) = (\mathbf{v}\mathbf{u})\mathbf{w} = \mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{w}$.

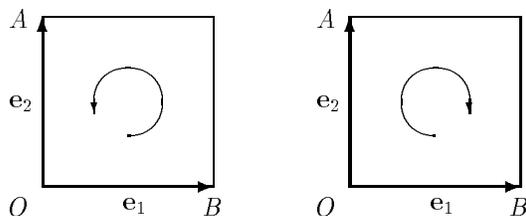
Voltando à questão da interpretação do objeto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, podemos ver facilmente que ele também não é um vetor de \mathbb{R}^3 . De fato, para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ temos $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2 \geq 0$, enquanto que neste caso

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1. \end{aligned} \quad (15)$$

Se $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ não é nem um escalar nem um vetor, o que ele é? Primeiro, lembremos que um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ pode ser interpretado como uma classe de equivalência de segmentos de reta de mesmo comprimento, direção e orientação dentro do espaço euclidiano tridimensional. Ora, nesse espaço não existem apenas segmentos de reta, mas também fragmentos de plano, superfícies, etc. Suponha que os segmentos de reta perpendiculares \overline{OA} e \overline{OB} sejam representados pelos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , como na figura abaixo.



Esses dois segmentos de reta determinam o que chamaremos um *fragmento de plano* (ou plaqueta). A este fragmento de plano podemos associar um “comprimento”, que é a sua *área*. Podemos também associar uma orientação conforme percorremos a sua fronteira no sentido *horário* ou *anti-horário*, como na figura abaixo.



De maneira análoga aos segmentos de reta, podemos definir uma classe de equivalência de fragmentos de plano de mesma área, direção e orientação. Iremos denotar os representantes desta classe por $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$. Podemos facilmente nos convencer que estes objetos satisfazem todas as propriedades de um *espaço vetorial*.

É necessário agora introduzirmos uma notação e nomenclatura convenientes para distinguirmos os vetores

do espaço vetorial \mathbb{R}^3 dos vetores do espaço vetorial discutido acima. Iremos nos referir a um vetor que representa a classe de equivalência descrita acima de fragmentos de planos como um *2-vetor* (ou bivector), e denotaremos o espaço vetorial dos 2-vetores por $\wedge^2(\mathbb{R}^3)$. Por questão de conveniência e uniformidade iremos às vezes nos referir a um vetor de \mathbb{R}^3 como um 1-vetor, e denotaremos $\wedge^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$. Do mesmo modo, às vezes iremos nos referir a um escalar como um 0-vetor e denotar $\wedge^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$.

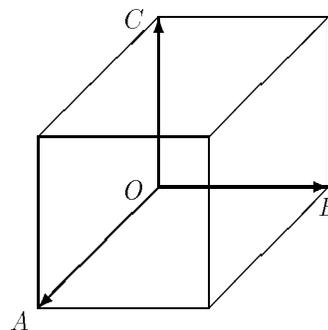
Interpretamos objetos como $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ como um 2-vetor. O fato de que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ significa que os 2-vetores $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ representam fragmentos de plano com orientações *opostas*. O 2-vetor $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ é um 2-vetor unitário (discutiremos isso com mais detalhes adiante), de modo que o 2-vetor $\mathbf{B} = \alpha\beta\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ representa um fragmento de plano de área $|\alpha\beta|$ – por exemplo, um retângulo de lados $|\alpha|$ e $|\beta|$ ou um quadrado de lado $\sqrt{|\alpha\beta|}$.

Um 2-vetor arbitrário de $\wedge^2(\mathbb{R}^3)$ é portanto da forma

$$\wedge^2(\mathbb{R}^3) \ni \mathbf{B} = B_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + B_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + B_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad (16)$$

onde B_{12}, B_{13}, B_{23} são escalares tais que $B_{ij} = -B_{ji}$ ($i \neq j$). Note que a dimensão de $\wedge^2(\mathbb{R}^3)$ é 3.

No espaço euclidiano tridimensional podemos também definir um elemento de volume. Se tomarmos os segmentos de reta $\overline{OA}, \overline{OB}$ e \overline{OC} representados pelos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e \mathbf{e}_3 , e os orientarmos de acordo com a regra da mão direita, temos o elemento de volume como ilustrado na figura abaixo.



De maneira análoga aos fragmentos de plano, podemos definir uma classe de equivalência de elementos de volume e dar a esta classe a estrutura de um espaço vetorial. Um tal vetor será dito um *3-vetor* e o espaço vetorial será denotado por $\wedge^3(\mathbb{R}^3)$. Note que há duas

orientações possíveis para um 3-vetor: de acordo com a *regra da mão direita* e de acordo com a *regra da mão esquerda*.

Interpretamos o objeto $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ como um 3-vetor. Note que a dimensão de $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$ é 1, de modo que qualquer 3-vetor \mathbf{T} pode ser escrito como

$$\bigwedge^3(\mathbb{R}^3) \ni \mathbf{T} = \alpha \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad (17)$$

onde α é um escalar. Note que se $\alpha > 0$ então \mathbf{T} representa um elemento de volume com a mesma orientação daquele representado por $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, enquanto se $\alpha < 0$ \mathbf{T} representa um elemento de volume com orientação oposta.

Como vimos, temos os seguintes espaços vetoriais associados a um espaço tridimensional: $\bigwedge^0(\mathbb{R}^3)$, $\bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$, $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ e $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$. Para trabalharmos com uma estrutura coerente devemos portanto considerar a *soma direta* $\bigwedge(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{k=0}^3 \bigwedge^k(\mathbb{R}^3)$. Um elemento de $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ será dito um *multivetor*. Um multivetor arbitrário é portanto da forma

$$\begin{aligned} \bigwedge(\mathbb{R}^3) \ni A = & \underbrace{a}_{\text{escalar}} + \underbrace{a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3}_{\text{vetor}} \\ & + \underbrace{a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}_{\text{2-vetor}} + \underbrace{a_{123}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}_{\text{3-vetor}} \end{aligned} \quad (18)$$

O espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ dotado do produto definido pelas relações (11) e (12) é o que denominaremos *álgebra geométrica*, no caso do espaço vetorial euclidiano tridimensional. Denotaremos esta álgebra por \mathcal{Cl}_3 , onde a notação \mathcal{Cl} é uma óbvia homenagem a Clifford.

O produto geométrico é justamente a generalização do produto quaterniônico, como veremos na próxima seção. Já a estrutura multivetorial de \mathcal{Cl}_3 é justamente a estrutura da álgebra de extensão de Grassmann. Vejamos melhor esta última relação, mesmo porque a nossa discussão foi um tanto restrita no sentido da sua dependência da base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{R}^3 .

Uma vez que $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$ ($i \neq j$) nos diz que os vetores \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j ($i \neq j$) são ortogonais e como \mathbf{e}_i e $\alpha\mathbf{e}_i$ são colineares, e nesse caso $\mathbf{e}_i(\alpha\mathbf{e}_i) = (\alpha\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$, somos levados à seguinte definição: os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} são ditos *ortogonais* se $\mathbf{v}\mathbf{u} = -\mathbf{u}\mathbf{v}$ e *colineares* se $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{v}$. Podemos agora colocar a seguinte questão: dados dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} , queremos decompor \mathbf{v} em uma parte \mathbf{v}_{\parallel} que é colinear ao vetor \mathbf{u} e uma parte \mathbf{v}_{\perp} que é ortogonal ao vetor \mathbf{u} . Queremos, portanto, escrever $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$,

onde $\mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{v}_{\parallel}$ e $\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{u} = -\mathbf{u}\mathbf{v}_{\perp}$. Usando $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}$, podemos ver facilmente que

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right), \quad (19)$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2} \right). \quad (20)$$

As equações acima podem ainda ser escritas como

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}, \quad (21)$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}, \quad (22)$$

onde definimos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (23)$$

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathbf{v}) = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \quad (24)$$

Segue-se daí a definição alternativa: os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} são ditos *ortogonais* se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ e *colineares* se $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = 0$.

Das eqs.(23,24) segue a decomposição do produto geométrico dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} em suas partes simétricas e anti-simétricas:

$$\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}. \quad (25)$$

O uso do “ponto” para denotar a parte simétrica do produto geométrico não é acidental. De fato, se expressamos os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} na base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e usamos as eqs.(11) e (12) vemos que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ corresponde justamente ao produto escalar dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} . Vemos deste modo que a escolha de Clifford é mais geral que a de Gibbs uma vez que o produto geométrico contém mais “informação” que o produto escalar, consistindo este último em uma parte do produto geométrico de vetores.

A parte anti-simétrica do produto geométrico dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} , denotada por $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$, é chamada *produto externo* ou *produto cunha* (ou ainda *produto de Grassmann*). Da nossa discussão anterior, interpretamos o produto geométrico $\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{u}$ dos vetores ortogonais \mathbf{v}_{\perp} e \mathbf{u} como um 2-vetor. Das eq.(21,22) segue que $\mathbf{v}_{\perp}\mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$, de modo que $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ é um 2-vetor. De maneira análoga podemos mostrar que $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ é um 3-vetor. Definimos também $\alpha \wedge \mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$, onde α é um escalar.

O espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ dotado do produto \wedge é a álgebra de extensão introduzida por Grassmann, que

denotaremos \mathcal{G}_3 . O produto \wedge é estendido para multivetores arbitrários por linearidade e associatividade.

A eq.(25) nos mostra que o resultado do produto geométrico de 1-vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} consiste em um 0-vetor (escalar) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ e um 2-vetor $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. Isto é reflexo de uma estrutura que dizemos ser Z_2 -graduada. Para melhor discutirmos esta estrutura, vamos definir a projeção de um multivetor em sua parte k -vetor.

Seja $A \in \mathcal{Cl}_3$ da forma geral

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3, \quad (26)$$

onde $A_k \in \wedge^k(\mathbb{R}^3)$ é um k -vetor. Definimos $\langle \rangle_k : \wedge(\mathbb{R}^3) \rightarrow \wedge^k(\mathbb{R}^3)$ como

$$\langle A \rangle_k = A_k, \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (27)$$

Note que $\langle \rangle_k$ é de fato um projetor pois $\langle A_k \rangle_l = \delta_{kl} A_k$.

Agora, dado um k -vetor A_k , definimos uma operação chamada *involução graduada* (ou *gradação*), que denotamos por $\hat{\cdot}$, através de

$$\hat{A}_k = (-1)^k A_k. \quad (28)$$

Dizemos que a gradação de A_k é par/ímpar conforme $(-1)^k$ seja $+/-$. Desse modo, dado $A \in \mathcal{Cl}_3$ temos

$$\hat{A} = A_0 - A_1 + A_2 - A_3. \quad (29)$$

Outra operação de interesse é a chamada *reversão*, que denotamos por $\tilde{\cdot}$, definida por

$$\tilde{A}_k = (-1)^{k(k-1)/2} A_k. \quad (30)$$

A denominação reversão se deve ao fato de que esta operação pode ser vista como invertendo a ordem do produto exterior, de modo que se reordenamos esse produto na ordem reversa para colocá-lo na ordem original aparece o fator $(-1)^{k(k-1)/2}$. Para $A \in \mathcal{Cl}_3$ temos

$$\tilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3. \quad (31)$$

A combinação das operações de reversão e involução graduada denominamos *conjugação*, e a denotamos por $\bar{\cdot}$. Desse modo

$$\bar{A} = A_0 - A_1 - A_2 + A_3. \quad (32)$$

Definimos a *norma* de um multivetor $A \in \mathcal{Cl}_3$ através de

$$|A|^2 = \langle \tilde{A}A \rangle_0 = \langle A\tilde{A} \rangle_0. \quad (33)$$

Expressando A como na eq.(18) segue da definição acima que

$$|A|^2 = a^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{123}^2. \quad (34)$$

Usando a involução graduada podemos escrever $\mathcal{Cl}_3 = \mathcal{Cl}_3^+ \oplus \mathcal{Cl}_3^-$ onde

$$\mathcal{Cl}_3^\pm = \{A \in \mathcal{Cl}_3 \mid \hat{A} = \pm A\}. \quad (35)$$

Em função da eq.(25) temos (i) $AB \in \mathcal{Cl}_3^+$ se $A \in \mathcal{Cl}_3^+$ e $B \in \mathcal{Cl}_3^+$, (ii) $AB \in \mathcal{Cl}_3^-$ se $A \in \mathcal{Cl}_3^+$ e $B \in \mathcal{Cl}_3^-$ ou $A \in \mathcal{Cl}_3^-$ e $B \in \mathcal{Cl}_3^+$. Desse modo vemos que \mathcal{Cl}_3^+ é uma *sub-álgebra* de \mathcal{Cl}_3 , chamada *sub-álgebra par*.

Vejam agora como generalizar a eq.(25). Usando a eqs.(23,24) e a associatividade, podemos ver que

$$\mathbf{v}A_k = \mathbf{v} \lrcorner A_k + \mathbf{v} \wedge A_k, \quad (36)$$

onde definimos

$$\mathbf{v} \lrcorner A_k = \frac{1}{2}(\mathbf{v}A_k - \hat{A}_k \mathbf{v}), \quad (37)$$

$$\mathbf{v} \wedge A_k = \frac{1}{2}(\mathbf{v}A_k + \hat{A}_k \mathbf{v}). \quad (38)$$

Quando $k = 1$ estas expressões se reduzem as eqs.(23,24). Note que não usamos o símbolo \cdot para denotar a parte definida pela eq.(37) uma vez que o resultado desta operação *não* é um escalar, mas sim um $(k-1)$ -vetor. Apenas quando $k = 1$ temos que $\mathbf{v} \lrcorner A_1$ é um escalar. Denominamos $\mathbf{v} \lrcorner A_k$ a *contração* de A_k por \mathbf{v} (pela esquerda). Apesar de $\mathbf{v} \lrcorner A_k$ não ser em geral um escalar, vamos por mera *questão de conviniência* denotar

$$\mathbf{v} \lrcorner A_k = \mathbf{v} \cdot A_k. \quad (39)$$

Se $k = 0$ definimos $\mathbf{v} \cdot A_0 = 0$. Podemos mostrar as importantes relações envolvendo a contração:

$$\mathbf{v} \cdot (A_k \wedge B_l) = (\mathbf{v} \cdot A_k) \wedge B_l + \hat{A}_k \wedge (\mathbf{v} \cdot B_l) \quad (40)$$

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \cdot A_k = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot A_k). \quad (41)$$

Existem algumas questões técnicas envolvendo o assunto que estamos tratando, mas que não vamos considerar. O leitor interessado poderá consultar sobre esse ponto as referências [5].

Finalmente, escrevemos

$$\mathbf{v}A_k = \mathbf{v} \cdot A_k + \mathbf{v} \wedge A_k. \quad (42)$$

Podemos generalizar essa expressão para o produto geométrico $\mathbf{v}A$ por linearidade. Devemos observar ainda que em geral

$$A_k B_l \neq A_k \cdot B_l + A_k \wedge B_l, \quad (43)$$

onde $A_k \cdot B_l \in \wedge^{k+l}$ e $A_k \wedge B_l \in \wedge^{k+l}$. Usando a eq.(42) podemos nos convencer que

$$A_k B_l = \langle A_k B_l \rangle_{|k-l|} + \langle A_k B_l \rangle_{|k-l|+2} + \dots + \langle A_k B_l \rangle_{k+l}. \quad (44)$$

Dualidade, álgebra vetorial e quatérnions

Vamos inicialmente introduzir uma operação de extrema importância denominada *dualidade*. Dado um k -vetor A_k definimos seu *dual* $\star A_k$ através de

$$\star A_k = \tilde{A}_k \mathbf{I}, \quad (45)$$

onde

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \quad (46)$$

é o elemento de volume (3-vetor) de \mathbb{R}^3 . Note a estreita dependência da definição acima com a *orientação* dada. O uso da operação de reversão na definição acima é para nos encaixarmos dentro de uma convenção usual uma vez que esta operação é completamente análoga à chamada dualidade de Hodge dentro do cálculo com formas diferenciais [6]. É fácil ver da definição acima que $\star A_k \in \wedge^{3-k}(\mathbb{R}^3)$, e como $\dim \wedge^k(\mathbb{R}^3) = \dim \wedge^{3-k}(\mathbb{R}^3)$, a operação de dualidade nos define um isomorfismo canônico entre $\wedge^k(\mathbb{R}^3)$ e $\wedge^{3-k}(\mathbb{R}^3)$. Devemos observar também que a definição acima é geral, de modo que se $A_k \in \wedge^k(\mathbb{R}^n)$ então $\star A_k \in \wedge^{n-k}(\mathbb{R}^n)$, e como $\dim \wedge^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dim \wedge^{n-k}(\mathbb{R}^n)$ temos um isomorfismo canônico entre $\wedge^k(\mathbb{R}^n)$ e $\wedge^{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Vamos, porém, nos restringir a \mathbb{R}^3 .

Usando a eq.(45) temos

$$\star 1 = \mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \star \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \\ \star \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \star \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \\ \star(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_3, \\ \star(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \star(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1, \\ \star \mathbf{I} &= \star \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = 1. \end{aligned} \quad (50)$$

Uma vez que um 2-vetor é o dual de um vetor e um 3-vetor é o dual de um escalar, é comum nos referirmos à um 2-vetor como um *pseudo-vetor* e a um

3-vetor como um *pseudo-escalar*. Isso, entretanto, *só é válido em \mathbb{R}^3* . Como dissemos acima, em \mathbb{R}^n o dual de um k -vetor é um $(n-k)$ -vetor, de modo que apenas em dimensão 3 o dual de um 2-vetor é um vetor. A interpretação deste fato é simples. Tomemos, por exemplo, o 2-vetor $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$. Como sabemos, esse 2-vetor descreve o fragmento de plano definido pelos vetores ortogonais \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Por outro lado $\star \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, que é um vetor normal à este plano (e tal que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ estão orientados de acordo com a regra da mão direita). Concluimos, portanto, que a operação de dualidade em espaços de dimensão 3 nos fornece um vetor $\star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ que é normal ao fragmento de plano descrito por $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. É óbvio que dado um plano é apenas em espaços de dimensão 3 que podemos definir um único vetor normal a este plano, e é essencialmente isto que nos diz a discussão acima acerca da operação de dualidade.

Estamos agora preparados para discutir a relação entre a álgebra geométrica \mathcal{Cl}_3 e a álgebra vetorial de Gibbs, que denotaremos por \mathcal{V}_3 . Para isso, recordemos a definição de produto vetorial. Dados os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} com coordenadas (v_1, v_2, v_3) e (u_1, u_2, u_3) em relação aos eixos cartesianos, o produto vetorial $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ é dado por

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3) \times (u_1, u_2, u_3) \\ = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1). \end{aligned} \quad (51)$$

Outra maneira de definirmos o produto vetorial é tomarmos os vetores ortonormais $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e definirmos

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}. \end{aligned} \quad (52)$$

Basta escrevermos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}, \\ \mathbf{u} &= u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}, \end{aligned} \quad (53)$$

e usarmos as definições acima para obtermos a eq.(51).

Como já nos referimos na introdução, essa definição de produto vetorial apresenta uma grande incoerência. Façamos uma operação de inversão espacial $\mathbf{e}_i \mapsto -\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Nesse caso, para os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} temos $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \mapsto -\mathbf{u}$, mas para $\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ temos

$\mathbf{w} \mapsto (-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. Como o “vetor” \mathbf{w} resultante do produto vetorial não se altera perante uma inversão espacial dizemos que ele \mathbf{w} é um *pseudo-vetor* (note que o sentido dado à denominação pseudo-vetor nesse caso se encaixa em um contexto diferente daquele da dualidade). Em outras palavras, o resultado do produto vetorial de Gibbs *não* é um vetor. Podemos pensar em resolver este problema – ou seja, temos uma estrutura que não é fechada – incluindo o espaço dos pseudo-vetores na estrutura em consideração, mas isso não resolve o problema que está evidente na definição (51) do produto vetorial. Enquanto o lado esquerdo da eq.(51) é o que dizemos ser um pseudo-vetor, o lado direito da eq.(51) *é um vetor*. A eq.(51) identifica, portanto, um pseudo-vetor e um vetor. O mesmo problema ocorre com a quantidade resultante do chamado produto misto dentro de \mathcal{V}_3 . O resultado do produto misto $(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{z} = \alpha$ é um número tal que $\alpha \mapsto -\alpha$ perante uma inversão espacial, sendo por isso denominado um pseudo-escalar. O fato é que a álgebra vetorial de Gibbs possui uma incoerência interna impossível de ser solucionada através da definição (51) – ou (52) – do produto vetorial. A solução deste problema se encontra dentro da estrutura multivetorial de \mathcal{Cl}_3 .

Dados os vetores \mathbf{v} e \mathbf{u} , vimos que $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ é um 2-vetor. Por outro lado, introduzimos a operação de dualidade que associa de maneira única um 2-vetor com um vetor, e vice-versa, no caso de \mathbb{R}^3 . Segue, portanto, que $\star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ é um vetor. Definimos o produto vetorial dentro de \mathcal{Cl}_3 como

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})\mathbf{I} = -\mathbf{I}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}). \quad (54)$$

Vamos primeiro mostrar que essa definição corresponde ao vetor definido pelo lado direito da eq.(51) e depois mostrar que esta definição não apresenta os problemas da definição em \mathcal{V}_3 .

Se escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{u} &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (55)$$

temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} &= (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &+ (v_3u_1 - v_1u_3)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (56)$$

e usando as eqs.(49),

$$\begin{aligned} \star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) &= (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{e}_1 \\ &+ (v_3u_1 - v_1u_3)\mathbf{e}_2 + (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (57)$$

que é justamente o vetor definido pelo lado direito da eq.(51).

Vejamos agora o que ocorre com $\star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ perante uma inversão espacial. Uma vez que $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ temos $\mathbf{I} \mapsto -\mathbf{I}$ quando $\mathbf{e}_i \mapsto -\mathbf{e}_i$, de modo que

$$\begin{aligned} \star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) &= -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})\mathbf{I} \\ &\mapsto -[(-bv) \wedge (-\mathbf{u})](-\mathbf{I}) = -\star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (58)$$

o que nos mostra que o produto vetorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ definido pela eq.(54) resulta realmente em um vetor. O motivo pelo qual esta definição “funciona” é o uso da operação de dualidade. Uma vez que na definição da dualidade entra o elemento de volume $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, e como este está relacionado com a orientação do espaço, quando fazemos uma inversão espacial a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ originalmente orientada segundo a regra da mão direita *muda de orientação* para segundo a regra da mão esquerda, e daí $\mathbf{I} \mapsto -\mathbf{I}$. Como o 2-vetor $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ não é alterado, o vetor normal associado através da operação de dualidade passa a ser definido pela orientação oposta, e portanto $\star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ muda de sinal.

O leitor nesse ponto provavelmente deve se questionar como descrever quantidades como o momentum angular, que não mudam de sinal quando da inversão espacial e que são descritas como pseudo-vetores dentro da álgebra vetorial \mathcal{V}_3 . Ora, como já dissemos, dentro de espaços de dimensão 3 um 2-vetor é o dual de um vetor, e daí o denominamos um pseudo-vetor. A coincidência na denominação é proposital e indica que quantidades como o momentum angular *não* são descritas por vetores mas *sim* por 2-vetores. No caso do momentum angular definimos o 2-vetor momentum angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$, que obviamente não muda de sinal perante uma inversão espacial. O vetor momentum angular \mathbf{l} é o dual de \mathbf{L} , ou seja, $\mathbf{l} = \star\mathbf{L}$. Esta é sem dúvida a definição mais natural uma vez que o momentum angular é uma quantidade que aparece relacionada com “áreas” ao invés de “comprimentos”, e, como vimos, são os 2-vetores que aparecem naturalmente associados com fragmentos de plano. Segundo esta definição o momentum angular pode ser visto como um tensor anti-simétrico de segunda ordem $L_{ij} = -L_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$), que é a definição usualmente empregada

na generalização relativística do conceito de momentum angular.

Vejamos agora onde e como aparecem os quatérnions dentro da álgebra geométrica Cl_3 . Primeiro, recordemos que os quatérnions consistem de elementos da forma

$$\mathbb{H} \ni q = \alpha + \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k} \quad (59)$$

com as seguintes regras de multiplicação:

$$\underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = -1, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \underline{i}\underline{j} &= -\underline{j}\underline{i} = \underline{k}, \\ \underline{j}\underline{k} &= -\underline{k}\underline{j} = \underline{i}, \\ \underline{k}\underline{i} &= -\underline{i}\underline{k} = \underline{j}. \end{aligned} \quad (61)$$

A notação $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ para as unidades quaterniônicas não é muito usual – geralmente i, j, k ou $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – mas esperamos que seja didaticamente útil para distinguirmos perfeitamente os diferentes conceitos envolvidos na nossa discussão. Dado um quatérnion q , a parte $\text{Re}(q) = \alpha$ é dita a parte *real* de q e a parte $\text{Pu}(q) = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k}$ é dita a parte *pura* de q .

A reinvidicação de Gibbs de que o produto vetorial definido pelas eqs.(51) ou (52) unificava os sistemas de Grassmann e de Hamilton já se mostrou injustificada com relação ao sistema de Grassmann. Vejamos que o mesmo ocorre com relação ao sistema de Hamilton. De fato, a semelhança entre as eqs.(52) e as eqs.(61) só ocorre realmente no nível da notação uma vez que os quatérnions se definem ainda pelas eqs.(60) e no primeiro caso temos $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$. A essência do erro *não* está, entretanto, na definição do produto vetorial em \mathcal{V}_3 uma vez que mesmo em Cl_3 e usando a eq.(54) temos $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$. Para levarmos em consideração as eqs.(60) dentro da álgebra vetorial \mathcal{V}_3 devemos usar o produto escalar $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, no caso com o sinal oposto. Nesse caso, o produto de dois quatérnions *puros* $q_1 = \text{Pu}(q_1)$ e $q_2 = \text{Pu}(q_2)$ pode ser escrito como $q_1 q_2 = -\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$, onde identificamos o quatérnion puro q_i com o vetor \vec{q}_i através de $\underline{i} \leftrightarrow \vec{i}, \underline{j} \leftrightarrow \vec{j}, \underline{k} \leftrightarrow \vec{k}$. É claro que esta expressão para o produto quaterniônico $q_1 q_2$ só vale se os quatérnions forem puros, de modo que não podemos tomar esta expressão como definindo o produto quaterniônico dentro de \mathcal{V}_3 . O *erro* presente no sistema de Gibbs nesse caso está em *tentar identificar* as unidades quaterniônicas

$\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ com os vetores ortonormais $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Como veremos, as unidades quaterniônicas devem ser identificadas com *2-vetores* e não com *1-vetores*.

Seja Cl_3^+ o conjunto dos elementos de Cl_3 com graduação par, ou seja,

$$Cl_3^+ \ni A = a + a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{31} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3. \quad (62)$$

Já vimos que se $A, B \in Cl_3^+$ então $AB \in Cl_3^+$, ou seja, Cl_3^+ é uma sub-álgebra de Cl_3 , denominada sub-álgebra par. Vamos introduzir agora a seguinte notação:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \quad (63)$$

de modo que

$$Cl_3^+ \ni A = a - a_{23} \mathbf{i} - a_{31} \mathbf{j} - a_{12} \mathbf{k}. \quad (64)$$

Notemos agora, usando as eqs.(11,12), que:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\mathbf{j} &= -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}\mathbf{k} &= -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k}\mathbf{i} &= -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (66)$$

ou seja, Cl_3^+ é uma álgebra isomorfa à dos quatérnions ($Cl_3^+ \simeq \mathbb{H}$), através da identificação $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\} \leftrightarrow \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Na construção do isomorfismo $Cl_3^+ \simeq \mathbb{H}$ acabamos de identificar as unidades quaterniônicas $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ com os 2-vetores $\{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1\}$. Uma vez que $\mathbf{i} = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = -\star \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{I}$, etc., segue que $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ é identificado com $-\star \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e *não* com $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, ou seja,

$$\mathbb{H} \simeq Cl_3^+ \ni A = a + \mathbf{I}(a_{23} \mathbf{e}_1 + a_{31} \mathbf{e}_2 + a_{12} \mathbf{e}_3). \quad (67)$$

Se tomamos dois quatérnions puros q_1 e q_2 , e os identificamos com $\mathbf{I}\vec{q}_1$ e $\mathbf{I}\vec{q}_2$, respectivamente, então $q_1 q_2 = -\vec{q}_1 \vec{q}_2 = -\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 - \mathbf{I}(\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)$, que é o análogo da fórmula de Gibbs, mas que é um caso particular de uma expressão mais geral que não encontra análogo na álgebra vetorial \mathcal{V}_3 .

Como vimos, a álgebra geométrica Cl_3 de Clifford sintetiza em um único esquema as estruturas de Hamilton e de Grassmann. A álgebra vetorial \mathcal{V}_3 de Gibbs não apenas não realiza esta síntese, como também apresenta incoerências internas. Como se não bastasse isso, ela é uma estrutura pobre, no sentido em que precisa ser suplementada por outras estruturas em muitas de suas aplicações. Por exemplo, para lidarmos com as rotações usando \mathcal{V}_3 precisamos considerar a álgebra de matrizes,

introduzida dentro do contexto das transformações lineares de \mathbb{R}^3 . Já no caso de Cl_3 não é necessária nenhuma outra estrutura para lidarmos com as rotações. Aliás, a própria estrutura de álgebra de matrizes já aparece associada à álgebra geométrica Cl_3 uma vez que Cl_3 é isomorfa à álgebra das matrizes complexas 2×2 .

Consideremos as matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (68)$$

que são as chamadas matrizes de Pauli. Note que

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= 1 \quad (i = 1, 2, 3), \\ \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i &= 0 \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (69)$$

Comparando as eqs.(69) com as eqs.(11,12) vemos que podemos identificar

$$\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \sigma_1, \quad \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \sigma_2, \quad \mathbf{e}_3 \leftrightarrow \sigma_3, \quad (70)$$

e daí estabelecer o isomorfismo entre Cl_3 e a álgebra $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ das matrizes complexas 2×2 gerada por $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Em função deste isomorfismo podemos *representar* os vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ por matrizes $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e trabalhar com a álgebra $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ ao invés de Cl_3 . Embora tentador, e muitas vezes útil, isso deve ser evitado sempre que possível. O motivo é que ao trabalharmos com $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ perdemos a estrutura multivetorial de Cl_3 , que é de extrema importância e utilidade.

Para exemplificarmos melhor a nossa construção dos quatérnions dentro de Cl_3 vamos explorar o isomorfismo entre Cl_3 e $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. Da eq.(68) vemos que as matrizes de Pauli satisfazem

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2. \quad (71)$$

Comparando estas equações com as eqs.(61) vemos que podemos identificar as unidades quaterniônicas através de

$$\underline{i} \leftrightarrow -i \sigma_1, \quad \underline{j} \leftrightarrow -i \sigma_2, \quad \underline{k} \leftrightarrow -i \sigma_3. \quad (72)$$

Por outro lado, dentro de Cl_3 identificamos $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ com $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Para $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ temos a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \leftrightarrow \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

O resultado acima não é surpresa uma vez que $\mathbf{I}^2 = -1$ e $\mathbf{e}_i \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$), ou seja, \mathbf{I} faz o papel de unidade

imaginária dentro de Cl_3 . Usando este resultado segue da definição de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ que

$$\mathbf{i} \leftrightarrow -i \sigma_1, \quad \mathbf{j} \leftrightarrow -i \sigma_2, \quad \mathbf{k} \leftrightarrow -i \sigma_3, \quad (74)$$

que em função da identificação $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\} \leftrightarrow \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é justamente a eq.(72).

Se escrevemos

$$\begin{aligned} A &= a + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \\ &+ a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + a_{123} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (75)$$

temos a seguinte representação matricial:

$$A \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}, \quad (76)$$

onde

$$\begin{aligned} z_1 &= (a + a_3) + i(a_{12} + a_{123}), \\ z_2 &= (a_1 + a_{13}) + i(a_2 + a_{23}), \\ z_3 &= (a_1 - a_{13}) - i(a_2 - a_{23}), \\ z_4 &= (a - a_3) - i(a_{12} - a_{123}). \end{aligned} \quad (77)$$

Note que $A_+ \in Cl_3^+$ é representado por

$$A_+ \leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix}, \quad (78)$$

onde $w_1 = a + ia_{12}$, $w_2 = a_{13} + ia_{23}$.

Finalmente, notemos que as operações de reversão, involução graduada e conjugação dadas pelas eqs.(29,31,32) se expressam em termos de matrizes, respectivamente, como

$$\tilde{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}, \quad (79)$$

$$\hat{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_4^* & -z_2^* \\ -z_3^* & z_1^* \end{pmatrix}, \quad (80)$$

$$\bar{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_4 & -z_3 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

IV. O operador nabla

Seja \mathcal{E}^3 o espaço euclidiano tridimensional, ou seja, em cada ponto de \mathcal{E}^3 temos a estrutura do espaço vetorial \mathbb{R}^3 , e portanto em cada um desses pontos temos definida uma álgebra geométrica Cl_3 . Como este espaço não possui nem curvatura nem torção, podemos identificar os vetores da base de \mathbb{R}^3 em cada ponto de \mathcal{E}^3 através do deslocamento paralelo usual de vetores. No caso do espaço eventualmente apresentar

curvatura e/ou torção podemos adaptar convenientemente a discussão que faremos, mas não é do nosso interesse considerar estes problemas neste artigo. Por simplicidade vamos considerar coordenadas cartesianas $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$. Sobre \mathcal{E}^3 podemos definir um *campo multivetorial* $A = A(\mathbf{x})$, cuja forma geral é

$$A = A(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + a_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + a_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + a_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3 + a_{12}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}(\mathbf{x})\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_{123}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \quad (82)$$

Definimos o *operador nabla* ∇ como o operador que age sobre o campo multivetorial $A(\mathbf{x})$ através de

$$\nabla A(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} A(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} A(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} A(\mathbf{x}), \quad (83)$$

e simbolicamente escrevemos

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (84)$$

Notemos que o operador nabla tem propriedades *vetoriais*, de modo que podemos escrever

$$\nabla A(\mathbf{x}) = \nabla \cdot A(\mathbf{x}) + \nabla \wedge A(\mathbf{x}). \quad (85)$$

Para termos uma melhor idéia do significado e propriedades de ∇ consideremos inicialmente o caso particular de um *campo escalar* $\varphi(\mathbf{x})$. Nesse caso

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}), \quad (86)$$

que é justamente o *gradiente* de $\varphi(\mathbf{x})$. Como definimos $\mathbf{v} \cdot a = 0$ quando a é um escalar, temos

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \nabla \wedge \varphi(\mathbf{x}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}) \quad (87)$$

para $\varphi \in \wedge^0(\mathcal{E}^3)$.

Consideremos agora um *campo vetorial* $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in \wedge^1(\mathcal{E}^3)$. A forma geral de $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ é

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + V_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + V_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3. \quad (88)$$

Temos, portanto:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (V_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + V_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + V_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3) \\ &+ \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (V_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + V_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + V_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3) \\ &+ \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (V_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + V_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + V_3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \nabla \wedge \mathbf{V}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (89)$$

onde identificamos

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad (90)$$

que é o *divergente* do campo vetorial $\mathbf{V}(\mathbf{x})$. A parte envolvendo o produto cunha é dada por

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{V}(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial V_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ &+ \left(\frac{\partial V_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (91)$$

e como $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \star(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ vemos facilmente que

$$\nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \star(\nabla \wedge \mathbf{V}(\mathbf{x})) = \text{curl } \mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad (92)$$

que é o *rotacional* do campo vetorial $\mathbf{V}(\mathbf{x})$. Logo,

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \star \text{curl } \mathbf{V}(\mathbf{x}). \quad (93)$$

Vemos portanto que as operações gradiente, divergente e rotacional são casos particulares da ação do operador nabla. É importante observarmos que as eqs.(87,92,93) *não* dependem das coordenadas escolhidas, mas esta discussão está fora dos nossos objetivos [7].

É fácil vermos também que

$$\nabla(\nabla A) = \nabla^2 A = \Delta A, \quad (94)$$

onde $\Delta = \nabla^2$ é o *laplaciano*

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (95)$$

Devemos observar que a expressão $\Delta = \nabla^2$ *não* faz nenhum sentido dentro de \mathcal{V}_3 , o que não é o caso dentro de \mathcal{Cl}_3 onde podemos realmente pensar no operador ∇ como “raiz quadrada” do operador laplaciano.

A representação matricial de ∇ usando as matrizes de Pauli é

$$\nabla \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Uma importante e interessante aplicação desse formalismo se refere às equações de Maxwell. Vamos definir o operador multivetorial \mathcal{D} por

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla, \quad (97)$$

e os multivetores \mathcal{F} e \mathcal{J} por

$$\mathcal{F} = \mathbf{E} + \mathbf{I}\mathbf{B} = \mathbf{E} + \star\mathbf{B}, \quad (98)$$

$$\mathcal{J} = \rho - \mathbf{J}, \quad (99)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são os campos elétrico e magnético, respectivamente, e ρ e \mathbf{J} são as densidades de carga e corrente elétricas, respectivamente. As equações de Maxwell podem ser escritas na forma de uma *única* equação, a saber:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{J}. \quad (100)$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) (\mathbf{E} + \mathbf{I}\mathbf{B}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E}) \\ &+ \mathbf{I} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{B}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} \right) \\ &+ \mathbf{I} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) + \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ &= \rho - \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (101)$$

de onde, igualando as partes k -vetoriais, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (102)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (103)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (104)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (105)$$

que são as equações de Maxwell.

V. O grupo spin(3)

O problema central envolvido nesta seção é o das *rotações*. Consideremos um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, no qual realizamos uma *rotação arbitrária*, resultando no vetor \mathbf{v}' . Da eq.(25) podemos escrever o produto geométrico $\mathbf{v}'\mathbf{v}$ na forma

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}. \quad (106)$$

Já vimos que $\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}$ é justamente o produto escalar, enquanto $\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}$ relaciona-se com o produto vetorial $\mathbf{v}' \times \mathbf{v}$ através de $\mathbf{v}' \times \mathbf{v} = -\mathbf{I}(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v})$. Logo

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{I}(\mathbf{v}' \times \mathbf{v}). \quad (107)$$

Dados dois vetores \mathbf{v}' e \mathbf{v} , *definimos* o ângulo θ entre eles através das expressões

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}'||\mathbf{v}|\cos\theta \quad (108)$$

$$|\mathbf{v}' \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v}'||\mathbf{v}|\sin\theta. \quad (109)$$

Por outro lado, o vetor $\mathbf{w} = \mathbf{v}' \times \mathbf{v}$ se encontra dirigido ao longo da *normal* ao fragmento de plano definido pelos vetores \mathbf{v}' e \mathbf{v} , de modo que podemos escrever

$$\mathbf{v}' \times \mathbf{v} = |\mathbf{v}' \times \mathbf{v}|\hat{\mathbf{w}} = |\mathbf{v}'||\mathbf{v}|\sin\theta\hat{\mathbf{w}}, \quad (110)$$

onde $\hat{\mathbf{w}}$ é o vetor normal (unitário). Usando as eqs.(108,110) temos

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = |\mathbf{v}'||\mathbf{v}|(\cos\theta + \mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\sin\theta). \quad (111)$$

Vamos analisar o termo entre parênteses na expressão acima. O vetor $\hat{\mathbf{w}}$ é unitário, ou seja, $\hat{\mathbf{w}}^2 = 1$, e \mathbf{I} é um 3-vetor (pseudo-escalar) tal que $\mathbf{I}^2 = -1$. Logo, $\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}} = \star\hat{\mathbf{w}}$ é um 2-vetor tal que $(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}})^2 = -1$. Se *definimos*

$$\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta)^n}{n!}, \quad (112)$$

segue, usando $(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}})^2 = -1$, que

$$\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta) = \cos\theta + \mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\sin\theta. \quad (113)$$

Esta expressão é uma generalização da famosa fórmula de Euler $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ ($i = \sqrt{-1}$).

Usando esta última expressão temos

$$\mathbf{v}'\mathbf{v} = |\mathbf{v}'||\mathbf{v}|\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta), \quad (114)$$

e multiplicando-a pela direita por \mathbf{v} segue que

$$\mathbf{v}' = \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta)\mathbf{v}, \quad (115)$$

onde usamos o fato que $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$ e que $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$ uma vez que \mathbf{v}' é o vetor que resulta de uma rotação de \mathbf{v} . Lembrando que $\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}} = |\mathbf{w}|^{-1}\mathbf{I}\mathbf{w} = |\mathbf{v}' \times \mathbf{v}|^{-1}\mathbf{I}(\mathbf{v}' \times \mathbf{v}) = |\mathbf{v}' \times \mathbf{v}|^{-1}(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v})$, e que $(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v})\mathbf{v} = -\mathbf{v}(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v})$, a eq.(115) pode ser escrita como

$$\mathbf{v}' = \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2)\mathbf{v}\exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2). \quad (116)$$

Tanto a eq.(115) como a eq.(116) descrevem a rotação do vetor \mathbf{v} através de um plano cujo vetor normal é $\hat{\mathbf{w}}$ por um ângulo θ . Porém, a expressão que devemos tomar para as rotações dentro de Cl_3 é a eq.(116) e não a eq.(115). De fato, queremos uma expressão para as rotações que expresse todos os fatos relativos a uma

rotação, em particular que uma rotação não altera os escalares e que uma rotação através de um plano não altera o 2-vetor que descreve este plano. Por isso devemos definir a rotação que estamos considerando através da eq.(116) uma vez que

$$\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2)\alpha \exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2) = \alpha, \quad (117)$$

$$\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2)(\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}) \exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2) = (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}) \quad (118)$$

enquanto expressões análogas à eq.(115) alteram o escalar α e o 2-vetor $\mathbf{v}' \wedge \mathbf{v}$.

Definimos portanto a rotação do multivetor A por um ângulo θ através do plano cuja normal é $\hat{\mathbf{w}}$ através da expressão

$$A' = \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2)A \exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2). \quad (119)$$

Para estudarmos melhor esta expressão vamos denotar

$$R = \exp \mathbf{B}, \quad (120)$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2$ é um 2-vetor. Note que

$$\tilde{R} = R^{-1} \quad (121)$$

uma vez que $\tilde{R} = \exp \tilde{\mathbf{B}} = \exp(-\mathbf{B}) = R^{-1}$. Além disso, da definição da função exponencial temos $R = \exp \mathbf{B} \in Cl_3^+$. Nesse ponto devemos notar que o conjunto dos elementos da forma $\exp \mathbf{B}$ com $\mathbf{B} \in \wedge^2(\mathbb{R}^3)$ forma um *grupo*. Esse grupo é denominado Spin(3), ou seja,

$$\text{Spin}(3) = \{R \in Cl_3^+ \mid \tilde{R} = R^{-1}\}. \quad (122)$$

Da definição acima pode não parecer evidente que Spin(3) é um grupo, mas o leitor não terá muita dificuldade para se convencer deste fato após uma análise mais detalhada. De fato, uma vez que $R \in \text{Spin}(3)$ é da forma $\exp \mathbf{B}$ temos

$$\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}_1\theta_1/2) \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}_2\theta_2/2) = \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}_3\theta_3/2) \quad (123)$$

com

$$\hat{\mathbf{w}}_3' = \frac{\hat{\mathbf{w}}_1' + \hat{\mathbf{w}}_2' - \hat{\mathbf{w}}_1' \times \hat{\mathbf{w}}_2'}{1 - \hat{\mathbf{w}}_1' \cdot \hat{\mathbf{w}}_2'}, \quad (124)$$

onde denotamos $\hat{\mathbf{w}}_i' = \hat{\mathbf{w}}_i \tan \theta_i/2$ ($i = 1, 2, 3$). Esta fórmula é chamada fórmula de Rodrigues e é uma generalização da lei das tangentes da trigonometria.

Da eq.(122) temos que $R \in \text{Spin}(3)$ é tal que $R\tilde{R} = 1$, com $R \in Cl_3^+$. Usando as eqs.(76,79) isso implica em termos de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ que

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (125)$$

ou seja,

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = \det \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} = 1. \quad (126)$$

Com isso estabelecemos o isomorfismo $\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$.

É interessante observarmos que a importante parametrização das rotações em termos dos ângulos de Euler (ϕ, θ, φ) [8] se escreve como

$$R = \exp(\mathbf{Ie}_3\phi/2) \exp(\mathbf{Ie}_1\theta/2) \exp(\mathbf{Ie}_3\varphi/2). \quad (127)$$

Usando a eq.(113) obtemos

$$\begin{aligned} R &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\phi + \varphi}{2} \right) + \cos \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\phi + \varphi}{2} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\ &+ \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\phi - \varphi}{2} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\phi - \varphi}{2} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (128)$$

cuja representação matricial usando as matrizes de Pauli é

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \exp \left[i \left(\frac{\phi + \varphi}{2} \right) \right] & i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left[i \left(\frac{\phi - \varphi}{2} \right) \right] \\ i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left[-i \left(\frac{\phi - \varphi}{2} \right) \right] & \cos \frac{\theta}{2} \exp \left[-i \left(\frac{\phi + \varphi}{2} \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (129)$$

Os elementos da matriz acima são os chamados parâmetros de Cayley-Klein [8].

Voltando à expressão das rotações em Cl_3 - eq.(119) - vemos que tanto R como $-R$ descrevem a *mesma rotação* uma vez que R aparece em par à direita e à esquerda de A . A explicação para este fato é simples: uma rotação através de um plano com normal $\hat{\mathbf{w}}$ por um ângulo θ é equivalente a uma rotação no mesmo plano mas no sentido contrário (logo com normal $-\hat{\mathbf{w}}$) por um ângulo $2\pi - \theta$. De fato, enquanto a primeira rotação é descrita por $R = \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2)$, a outra é descrita por

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{I}(-\hat{\mathbf{w}})(2\pi - \theta)/2) &= \\ \exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2) \exp(-\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\pi/2) &= -\exp(\mathbf{I}\hat{\mathbf{w}}\theta/2) = -R. \end{aligned} \quad (130)$$

Dizemos que o grupo Spin(3) é o *recobrimento duplo* do grupo SO(3). O grupo SO(3) aparece quando representamos a rotação $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = R\mathbf{v}\tilde{R} = \mathcal{R}(\mathbf{v})$ através da transformação linear $\mathcal{R}(\mathbf{v})$, ou seja, $\mathcal{R}(\mathbf{e}_i) = \mathcal{R}_{ij}\mathbf{e}_j$. Se

calculamos $Re_i\tilde{R}$ usando R dado pela eq.(127) e definindo \mathcal{R}_{ij} através de $\mathcal{R}_{ij}\mathbf{e}_j = Re_i\tilde{R}$ obtemos a matriz $\{\mathcal{R}_{ij}\}$ dada por [8]

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} & \mathcal{R}_{13} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} & \mathcal{R}_{23} \\ \mathcal{R}_{31} & \mathcal{R}_{32} & \mathcal{R}_{33} \end{pmatrix}, \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= \cos\varphi\cos\phi - \cos\theta\sin\varphi\sin\phi, \\ \mathcal{R}_{12} &= -\cos\varphi\sin\phi - \cos\theta\sin\varphi\cos\phi, \\ \mathcal{R}_{13} &= \sin\theta\sin\varphi, \\ \mathcal{R}_{21} &= \sin\varphi\cos\phi + \cos\theta\cos\varphi\sin\phi, \\ \mathcal{R}_{22} &= \sin\varphi\sin\phi + \cos\theta\cos\varphi\cos\phi, \\ \mathcal{R}_{23} &= -\sin\theta\cos\varphi, \\ \mathcal{R}_{31} &= \sin\theta\sin\phi, \\ \mathcal{R}_{32} &= \sin\theta\cos\phi, \\ \mathcal{R}_{33} &= \cos\theta. \end{aligned} \quad (132)$$

Finalmente, vamos considerar o caso em que as rotações dependem de um parâmetro t . Nesse caso $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}'_i(t) = R(t)\mathbf{e}_i\tilde{R}(t)$, e podemos escrever

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \frac{1}{2}(\Omega_t\mathbf{e}'_i - \mathbf{e}'_i\Omega_t) = \Omega_t \cdot \mathbf{e}'_i, \quad (133)$$

onde definimos

$$\Omega_t = 2\dot{R}\tilde{R}. \quad (134)$$

Como $R \in Cl_3^+$ e $R\tilde{R} = 1$ segue que $\hat{\Omega}_t = \Omega_t$ e $\tilde{\Omega}_t = -\Omega_t$, ou seja, Ω_t é um 2-vetor. Definindo ω como

$$\omega = -\star\Omega_t = \mathbf{I}\Omega_t \quad (135)$$

temos

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = (-\mathbf{I}\omega) \cdot \mathbf{e}'_i = -\mathbf{I}(\omega \wedge \mathbf{e}'_i) = \omega \times \mathbf{e}'_i. \quad (136)$$

O vetor ω é o que chamamos em Mecânica de vetor velocidade angular e na geometria de curvas de vetor de Darboux [9]. Denominamos Ω_t 2-vetor de Darboux.

De extrema importância é a base $\{\mathbf{f}_i\}$ na qual o 2-vetor de Darboux assume a forma

$$\Omega_t = A\mathbf{f}_2\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_3\mathbf{f}_2. \quad (137)$$

Nesse caso as equações $\dot{\mathbf{f}}_i = \Omega_t \cdot \mathbf{f}_i$ são dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_1 &= A\mathbf{f}_2, \\ \dot{\mathbf{f}}_2 &= -A\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_3, \\ \dot{\mathbf{f}}_3 &= -B\mathbf{f}_2, \end{aligned} \quad (138)$$

que reconhecemos como as equações de Frenet [9]. A base $\{\mathbf{f}_i\}$ é chamada base de Frenet.

No caso do espaço euclidiano \mathcal{E}^3 podemos ainda considerar rotações locais $R(\mathbf{x})$. De maneira análoga temos $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}'_i(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x})\mathbf{e}_i\tilde{R}(\mathbf{x})$, e podemos escrever

$$\partial_k\mathbf{e}'_i = \frac{\partial\mathbf{e}'_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(\Omega_k\mathbf{e}'_i - \mathbf{e}'_i\Omega_k) = \Omega_k \cdot \mathbf{e}'_i, \quad (139)$$

onde definimos os 2-vetores de Darboux

$$\Omega_k = 2(\partial_k R)\tilde{R}. \quad (140)$$

Usando $\partial_k R = (1/2)\Omega_k R$ e exigindo que $\partial_k\partial_l R = \partial_l\partial_k R$ segue que Ω_k deve satisfazer

$$\partial_l\Omega_k - \partial_k\Omega_l = \frac{1}{2}(\Omega_l\Omega_k - \Omega_k\Omega_l) = \frac{1}{2}[\Omega_l, \Omega_k]. \quad (141)$$

O conjunto dos 2-vetores Ω_k munido do comutador como produto é uma sub-álgebra de Cl_3 , que é justamente a álgebra de Lie do grupo Spin(3). Esse assunto é muito interessante e importante, mas a sua discussão está fora dos nossos presentes objetivos.

VI. O spinor de Pauli

Vimos que $Cl_3 \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, que é a álgebra das matrizes complexas 2×2 gerada por $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Estas matrizes representam os endomorfismos do espaço vetorial \mathbb{C}^2 , ou seja, aplicações lineares $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. O espaço vetorial \mathbb{C}^2 é o que chamamos de *espaço dos spinors*, no caso do espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Em outras palavras, um *spinor* é um elemento da forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad (142)$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Estes *spinors* são chamados *spinors de Pauli*.

A definição acima de um *spinor* de Pauli, embora usual, é demais abstrata. Isso se deve, sobretudo, ao fato da definição se dar em termos da álgebra de matrizes $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ e não em termos da álgebra geométrica Cl_3 . Vamos procurar, portanto, uma definição equivalente do *spinor* de Pauli em termos de Cl_3 , que esperamos apresente uma clara interpretação geométrica.

Consideremos o multivetor f dado por

$$f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_3). \quad (143)$$

Este multivetor é dito um *idempotente* uma vez que $f^2 = f$. O conjunto da forma $\mathcal{I}_3 = Cl_3 f$ é um *ideal à esquerda* da álgebra Cl_3 – um ideal (à esquerda) I da álgebra \mathcal{A} é o conjunto dos elementos de \mathcal{A} tais que $xi \in \mathcal{I}, \forall x \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathcal{I}$.

Vamos, por razões que ficarão claras a seguir, denotar $f = |1\rangle$. Se tomamos $A \in Cl_3$ na forma geral (75) podemos escrever para $Af = A|1\rangle$ a expressão:

$$A|1\rangle = [(a + a_3) + \mathbf{I}(a_{12} + a_{123})]|1\rangle + [(a_1 + a_{13}) + \mathbf{I}(a_2 + a_{23})]|2\rangle, \quad (144)$$

onde definimos $|2\rangle = \mathbf{e}_1 f$.

Por outro lado, para $A|2\rangle$ temos

$$A|2\rangle = [(a_1 - a_{13}) - \mathbf{I}(a_2 - a_{23})]|1\rangle + [(a - a_3) - \mathbf{I}(a_{12} - a_{123})]|2\rangle. \quad (145)$$

Uma vez que \mathbf{I} faz o papel de unidade imaginária em Cl_3 tomamos $\mathbf{I}f = if$ e das eqs.(144,145) segue a representação matricial (76) do multivetor A , onde definimos A_{ba} ($a, b = 1, 2$) através de $A|a\rangle = A_{ba}|b\rangle$. Se definimos $\langle 1| = \widetilde{|1\rangle}$ e $\langle 2| = \widetilde{|2\rangle}$, segue que

$$\langle a|b\rangle = \delta_{ab}f \quad (a, b = 1, 2), \quad (146)$$

onde $\delta_{ab} = 1$ para $a = b = 1, 2$ e $\delta_{ab} = 0$ para $a \neq b$. Além disso

$$\sum_{a=1}^2 |a\rangle \langle a| = 1, \quad (147)$$

de onde segue

$$A|a\rangle = \sum_{b=1}^2 |b\rangle \langle b|A|a\rangle = \sum_{b=1}^2 A_{ba}|b\rangle, \quad (148)$$

que nos fornece os elementos A_{ba} na eq.(76).

Com isso, se identificamos

$$|1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (149)$$

podemos escrever um *spinor* de Pauli na forma

$$\psi = (\alpha_1 + i\beta_1)|1\rangle + (\alpha_2 + i\beta_2)|2\rangle. \quad (150)$$

Nesse caso ψ é um elemento do ideal à esquerda $\mathcal{I}_3 = Cl_3 f$, que é uma definição que não faz nenhuma referência à representação matricial de Cl_3 . Chegamos assim a uma *definição algébrica* do *spinor* de Pauli.

Se comparamos $\psi = \psi f$ com Af dado pelo eq.(144) vemos que ψ não necessita ser definido como um elemento de $Cl_3 f$ mas podemos igualmente defini-lo em termos de $Cl_3^+ f$ uma vez que a eq.(144) nos diz que $Cl_3 f \simeq Cl_3^+ f$. Além disso, a eq.(76) nos mostra que $Cl_3^+ \simeq Cl_3^+ f$, onde este isomorfismo é dado explicitamente por

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}. \quad (151)$$

Com isso podemos representar um *spinor* de Pauli em Cl_3 como um elemento da sub-álgebra par Cl_3^+ . Chegamos assim a uma definição alternativa do *spinor* de Pauli como um elemento de Cl_3^+ . Diremos que este elemento de Cl_3^+ é um *spinor operatorial* de Pauli, por motivos que ficarão claros a seguir. A relação entre $\psi \in Cl_3^+$ e $\psi \in \mathbb{O}^2$ é dada explicitamente por

$$\begin{aligned} \psi &= a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} a + ia_{12} \\ a_{13} + ia_{23} \end{pmatrix} = \psi. \end{aligned} \quad (152)$$

Note que

$$\psi = (a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) + (a_{13} + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad (153)$$

onde $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ fazem o papel de unidade imaginária. Se tomamos $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2| \rangle = \alpha| \rangle$ segue que $\alpha^2 = -1$, de modo que $\alpha = \pm i$. Definindo $|1\rangle$ e $|2\rangle$ de modo que $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|1\rangle = i|1\rangle$ e $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|2\rangle = -i|2\rangle$ temos $|2\rangle = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3|1\rangle$, o que nos leva à representação já discutida.

Por outro lado vimos que $Cl_3^+ \simeq \mathbb{H}$, de onde concluímos que um *spinor* operatorial de Pauli pode ser representado por um *quatérnion*. Uma vez que os quatérnions possuem vastas aplicações em Mecânica e Eletromagnetismo Clássicos concluímos que mesmo dentro de “áreas clássicas” o conceito de *spinor* encontra várias aplicações.

Vamos agora justificar a denominação *spinor operatorial* (de Pauli) para aquele elemento de Cl_3^+ . Dado $\psi \in Cl_3^+$ temos

$$\psi\tilde{\psi} = a^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 = \rho, \quad (154)$$

onde $\rho > 0$.

Note que podemos identificar $(a/\sqrt{\rho}, a_{12}/\sqrt{\rho}, a_{13}/\sqrt{\rho}, a_{23}/\sqrt{\rho})$ com as coordenadas locais de \mathbb{R}^4 e a eq.(154) como descrevendo S^3 . Os ângulos de Euler (ϕ, θ, φ) podem ser usados para parametrizar S^3 , e podemos escrever

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right), \\ a_{12} &= \sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right), \\ a_{13} &= \sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right), \\ a_{23} &= \sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right), \end{aligned} \quad (155)$$

ou seja,

$$\psi = \sqrt{\rho}R, \quad (156)$$

onde $R \in \text{Spin}(3)$, ou seja, $R \in \text{Cl}_3^+$, $R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$, dado, por exemplo, pelas eqs.(127,128).

Agora, o resultado da operação $\psi\mathbf{v}\tilde{\psi}$ é:

$$\psi\mathbf{v}\tilde{\psi} = \rho R\mathbf{v}\tilde{R}, \quad (157)$$

onde $\tilde{R} = R^{-1} \in \text{Cl}_3^+$ e $\rho > 0$. Mas $R\mathbf{v}\tilde{R}^{-1}$ representa uma rotação do vetor \mathbf{v} e a multiplicação por $\rho > 0$ uma dilatação. Concluímos assim que ψ age sobre um vetor através de uma *rotação* e de uma *dilatação*. Em função desta interpretação de ψ em termos de sua operação sobre um vetor como em $\mathbf{v} \mapsto \psi\mathbf{v}\tilde{\psi}$ sugere-se o nome *spinor* operatorial para ψ .

Se ψ age sobre um vetor através de uma rotação e de uma dilatação, podemos escrever um vetor arbitrário de \mathbb{R}^3 como o resultado da ação de ψ sobre um “vetor de referência”. Tomando este vetor por conveniência como sendo \mathbf{e}_3 podemos escrever $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ na forma

$$\mathbf{x} = \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}. \quad (158)$$

O cálculo da expressão acima nos fornece para $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ que

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(aa_{13} + a_{12}a_{23}), \\ x_2 &= 2(aa_{23} - a_{12}a_{13}), \\ x_3 &= a^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2. \end{aligned} \quad (159)$$

Se usamos as eqs.(155) segue que

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \sin \theta \sin \phi, \\ x_2 &= \rho \sin \theta \cos \phi, \\ x_3 &= \rho \cos \theta, \end{aligned} \quad (160)$$

onde reconhecemos (ρ, θ, ϕ) como as coordenadas esféricas.

É claro que poderíamos chegar às mesmas conclusões usando $\psi \in \mathbb{C}^2$, mas isto não é muito evidente de antemão. Além disso devemos trabalhar nesse caso com cada coordenada x_i ($i = 1, 2, 3$) em separado. Como $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = \langle \mathbf{x}\mathbf{e}_i \rangle_0$ temos $x_i = \langle \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}\mathbf{e}_i \rangle_0$. Mas a eq.(76) nos mostra que em termos daquela representação matricial temos $\langle \cdot \rangle_0 \leftrightarrow \text{Tr}(\cdot)$ e $\tilde{\psi} \leftrightarrow \psi^\dagger$ (conjugação hermitiana – eq.(79)). Logo x_i é dado por $(1/2)\text{Tr}(\psi\sigma_3\psi^\dagger\sigma_i) = (1/2)\text{Tr}(\sigma_3\psi^\dagger\sigma_i\psi)$. Mas $f = (1/2)(1 + \mathbf{e}_3)$, de modo que $x_i = \text{Tr}(f\psi^\dagger\sigma_i\psi f)$, onde usamos $f^2 = f$ e $\sigma_3 f = f$. Temos finalmente

$$x_i = \psi^\dagger\sigma_i\psi. \quad (161)$$

Usando a eq.(152) temos

$$\psi = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \exp \left(i \frac{\phi}{2} \right) \\ i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left(-i \frac{\phi}{2} \right) \end{pmatrix} \exp i \left(\frac{\varphi}{2} \right), \quad (162)$$

e se calculamos x_i de acordo com a eq.(161) e usando a eq.(162) obtemos o resultado das eqs.(160).

VII. A transformação ativa do spinor

Na seção anterior mostramos como o conceito de *spinor* pode ser interpretado do ponto de vista operacional, ou seja, por sua ação sobre um vetor através de uma rotação e uma dilatação. Com isso, vimos que podemos escrever um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ na forma

$$\mathbf{x} = \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}, \quad (163)$$

onde $\psi \in \text{Cl}_3^+$ é um *spinor* (operatorial) de Pauli. A escolha do “vetor de referência” \mathbf{e}_3 é, entretanto, completamente arbitrária. Poderíamos escolher qualquer outro vetor \mathbf{u} e escrever $\mathbf{x} = \chi\mathbf{u}\tilde{\chi}$, onde $\chi \in \text{Cl}_3^+$ é um outro *spinor* de Pauli.

Vamos, sem perda de generalidade, escolher esse outro “vetor de referência” como sendo \mathbf{e}'_3 , obtido à partir de \mathbf{e}_3 por uma dada rotação. Nesse caso podemos escrever

$$\mathbf{x} = \psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}} = \psi_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}'}, \quad (164)$$

onde

$$\psi_{\mathcal{B}} = a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad (165)$$

$$\psi_{\mathcal{B}'} = a' + a'_{12}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2 + a'_{13}\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_3 + a'_{23}\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3. \quad (166)$$

A notação acima, ou seja, $\psi_{\mathcal{B}}$ e $\psi_{\mathcal{B}'}$, pode parecer um pouco confusa à primeira vista, mas como veremos ela é de extrema utilidade.

Podemos interpretar a eq.(164) da seguinte forma. As bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ podem ser pensadas como estando associadas a dois sistemas de referência \mathcal{S} e \mathcal{S}' , enquanto o vetor \mathbf{x} descreve uma propriedade objetiva do sistema em consideração (por exemplo, a posição de uma partícula). Nesse caso a expressão $\psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}}$ nos diz como calcular \mathbf{x} dentro do sistema \mathcal{S} , enquanto a expressão $\psi_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}'}$ nos diz como calcular a mesma quantidade \mathbf{x} dentro do sistema \mathcal{S}' . Como \mathcal{B} e \mathcal{B}' estão supostamente relacionados por uma rotação,

os sistemas \mathcal{S} e \mathcal{S}' devem ser considerados como equivalentes, e os objetos $\psi_{\mathcal{B}}$ e $\psi_{\mathcal{B}'}$ devem ser pensados de alguma forma como sendo o *mesmo* objeto uma vez que ambos determinam o mesmo vetor \mathbf{x} .

Com isso chegamos à *definição precisa* do conceito de *spinor* operatorial (de Pauli). Um *spinor operatorial* é uma *classe de equivalência* de elementos $\psi_{\mathcal{B}}, \psi_{\mathcal{B}'}, \dots \in Cl_3^+$ tais que $\psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}} = \psi_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}'} = \dots$, onde $\mathbf{e}'_i = R\mathbf{e}_i\tilde{R}$ ($i = 1, 2, 3$), $R \in \text{Spin}(3)$. Vamos denotar essa classe de equivalência por Ψ . Nesse caso dizemos que $\psi_{\mathcal{B}}$ é o *representante de Ψ na base \mathcal{B}* e $\psi_{\mathcal{B}'}$ é o *representante de Ψ na base \mathcal{B}'* .

Vamos agora explorar essa definição. Primeiro, temos

$$\mathbf{x} = \psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \quad (167)$$

$$\mathbf{x} = \psi_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}'} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3, \quad (168)$$

onde as coordenadas x_i e x'_i são dadas através de

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(aa_{13} + a_{12}a_{23}), \\ x_2 &= 2(aa_{23} - a_{12}a_{13}), \\ x_3 &= a^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2, \end{aligned} \quad (169)$$

e

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2(a'a'_{13} + a'_{12}a'_{23}), \\ x'_2 &= 2(a'a'_{23} - a'_{12}a'_{13}), \\ x'_3 &= a'^2 + a'^2_{12} - a'^2_{13} - a'^2_{23}. \end{aligned} \quad (170)$$

Por outro lado, uma vez que $\mathbf{e}'_i = R\mathbf{e}_i\tilde{R}$, temos

$$\psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}} = \psi_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}'} \implies \psi_{\mathcal{B}'} = \psi_{\mathcal{B}}R^{-1}. \quad (171)$$

Em outras palavras, $\psi_{\mathcal{B}}$ e $\psi_{\mathcal{B}'}$ dados pelas eqs.(165) e (166) são considerados *equivalentes* se $\psi_{\mathcal{B}'} = \psi_{\mathcal{B}}R^{-1}$, onde $R \in \text{Spin}(3)$ ($R^{-1} = \tilde{R}$). Usando $\mathbf{e}'_i = R\mathbf{e}_i\tilde{R}$ na eq.(166) segue desta relação de equivalência que

$$\begin{aligned} a + a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ = R(a' + a'_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a'_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a'_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (172)$$

Usando a parametrização de R em termos dos ângulos de Euler (ϕ, θ, φ) dada pela eq.(127) ou (128), obtemos da equação acima que

$$\begin{aligned} a &= a'\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) - a'_{12}\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) \\ &\quad - a'_{13}\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) - a'_{23}\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right), \\ a_{12} &= a'\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) + a'_{12}\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) \end{aligned} \quad (173)$$

$$+ a'_{13}\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) - a'_{23}\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right), \quad (174)$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= a'\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) - a'_{12}\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) \\ &\quad + a'_{13}\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) + a'_{23}\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right), \end{aligned} \quad (175)$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= a'\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) + a'_{12}\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi-\varphi}{2}\right) \\ &\quad - a'_{13}\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right) + a'_{23}\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\phi+\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (176)$$

Usando estas expressões para a , a_{12} , a_{13} e a_{23} nas eqs.(169), obtemos após algumas manipulações que

$$\begin{aligned} x_1 &= (\cos\varphi\cos\phi - \cos\theta\sin\varphi\sin\phi)x'_1 \\ &\quad + (\sin\varphi\cos\phi + \cos\theta\cos\varphi\sin\phi)x'_2 + (\sin\theta\sin\phi)x'_3, \end{aligned} \quad (177)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= -(\cos\varphi\sin\phi + \cos\theta\sin\varphi\cos\phi)x'_1 \\ &\quad + (\sin\varphi\sin\phi + \cos\theta\cos\varphi\cos\phi)x'_2 + (\sin\theta\cos\phi)x'_3, \end{aligned} \quad (178)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= (\sin\theta\sin\varphi)x'_1 - (\sin\theta\cos\varphi)x'_2 + (\cos\theta)x'_3, \end{aligned} \quad (179)$$

onde x'_i são dados pelas eqs.(170). O resultado acima é justamente o esperado, e que poderíamos ter obtido usando a matriz $\{\mathcal{R}_{ij}\}$ dada pela eq.(131), o que nos mostra a *necessidade* de definirmos um *spinor* através de uma classe de equivalência.

Vejam agora como definir uma transformação *ativa* de um *spinor*. Seja $\mathbf{x} = \psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}}$, e façamos uma transformação ativa

$$\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}'_i = R\mathbf{e}_i\tilde{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = R\mathbf{x}\tilde{R}, \quad (180)$$

onde $R \in \text{Spin}(3)$. Do ponto de vista de uma transformação ativa, o vetor \mathbf{x}' é um *outro* vetor, e podemos escrever

$$\mathbf{x}' = \psi'_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}'_{\mathcal{B}'}, \quad (181)$$

onde $\psi'_{\mathcal{B}}$ e $\psi'_{\mathcal{B}'}$ são os representantes do *spinor* Ψ' nas bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' , respectivamente. Mas

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \psi'_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}'_{\mathcal{B}'} = R\mathbf{x}\tilde{R} = R\psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}} \\ &= R\psi_{\mathcal{B}}\tilde{R}R\mathbf{e}_3\tilde{R}\tilde{\psi}_{\mathcal{B}}\tilde{R} = R(\psi_{\mathcal{B}}R^{-1})\mathbf{e}'_3(R\tilde{\psi}_{\mathcal{B}})\tilde{R}, \end{aligned} \quad (182)$$

de onde concluímos que

$$\psi'_{\mathcal{B}'} = R\psi_{\mathcal{B}}R^{-1}. \quad (183)$$

Mas se $\psi_{\mathcal{B}}$ e $\psi_{\mathcal{B}'}$ são os representantes de Ψ nas bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' então $\psi_{\mathcal{B}'} = \psi_{\mathcal{B}}R^{-1}$. Desse modo, temos

$$\psi'_{\mathcal{B}'} = R\psi_{\mathcal{B}'}, \quad (184)$$

que é a expressão para a transformação ativa de um *spinor* em termos de seu representante na base \mathcal{B}' . Em termos da base \mathcal{B} temos $\psi'_{\mathcal{B}'} = \psi'_{\mathcal{B}}R^{-1}$, de modo que

$$\psi'_{\mathcal{B}} = R\psi_{\mathcal{B}}, \quad (185)$$

o que nos mostra de maneira geral que

$$\Psi' = R\Psi. \quad (186)$$

Vamos agora olhar para este problema do ponto de vista de sua representação matricial. Primeiro, em \mathcal{S} podemos representar os vetores $\{\mathbf{e}_i\}$ pelas matrizes de Pauli $\{\sigma_i\}$. Por outro lado, em \mathcal{S}' podemos representar os vetores $\{\mathbf{e}'_i\}$ pelas *mesmas* matrizes de Pauli $\{\sigma_i\}$. É claro que isso não é necessário uma vez que poderíamos representá-los por matrizes $\sigma'_i = U\sigma_iU^{-1}$, onde $U \in \text{SU}(2)$, mas esta é a escolha mais apropriada tanto para \mathcal{S} como para \mathcal{S}' – além de didaticamente conveniente. Nesse caso representaríamos $\psi_{\mathcal{B}}$ e $\psi_{\mathcal{B}'}$ através da *mesma* matriz coluna

$$\psi = \begin{pmatrix} a + ia_{12} \\ a_{13} + ia_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' + ia'_{12} \\ a'_{13} + ia'_{23} \end{pmatrix}. \quad (187)$$

Portanto, em termos de representação matricial *não faz sentido* distinguirmos \mathcal{S} e \mathcal{S}' . A transformação ativa de ψ é dada nesse caso por

$$\psi \mapsto \psi' = R\psi, \quad (188)$$

onde R agora é dado pela matriz da eq.(129). O que vemos é que em termos da representação matricial a transformação de um *spinor* só pode ser interpretada no sentido *ativo*¹. Já em termos da representação de um *spinor* em termos de $\mathcal{C}\ell_3^+$ podemos também pensar em uma transformação no sentido passivo, nesse caso dos *representantes* do *spinor* Ψ em termos das bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' .

Um dos fatos mais intrigantes com relação a um *spinor* é que após uma rotação de 2π temos $\psi \mapsto -\psi$ – se

tomarmos por exemplo $(\phi, \theta, \varphi) = (2\pi, 0, 0)$ ou $(0, 2\pi, 0)$ ou $(0, 0, 2\pi)$ temos $R = -1$ e daí $\psi \mapsto -\psi$. Embora esse fato não altere o valor das quantidades observáveis, a sua interpretação e consequências são um objeto de grande especulação [10]. Vejamos como a interpretação desse fato é muito simples dentro do que discutimos.

Vimos que uma transformação ativa sobre $\psi_{\mathcal{B}}$ ou $\psi_{\mathcal{B}'}$ se faz através de $\psi_{\mathcal{B}} \mapsto \psi'_{\mathcal{B}} = R\psi_{\mathcal{B}}$ ou $\psi_{\mathcal{B}'} \mapsto \psi'_{\mathcal{B}'} = R\psi_{\mathcal{B}'} = R'\psi_{\mathcal{B}'}$, onde R' é o mesmo multivetor R escrito não em termos de $\{\mathbf{e}_i\}$ mas de $\{\mathbf{e}'_i\}$, ou seja, $R' = R(R)\tilde{R} = R$. O que uma equação como $\psi'_{\mathcal{B}} = R\psi_{\mathcal{B}}$ nos mostra é a expressão do *spinor* transformado Ψ' na base \mathcal{B} , ou seja, $\psi'_{\mathcal{B}}$. Em termos da base transformada \mathcal{B}' temos $\psi'_{\mathcal{B}'} = R\psi_{\mathcal{B}'}$, e como $\psi_{\mathcal{B}'} = \psi_{\mathcal{B}}R^{-1}$, temos $\psi'_{\mathcal{B}'} = R\psi_{\mathcal{B}}R^{-1}$. Após uma rotação de 2π temos $\psi'_{\mathcal{B}'} = -\psi_{\mathcal{B}'}$, $\psi'_{\mathcal{B}} = -\psi_{\mathcal{B}}$ mas $\psi'_{\mathcal{B}'} = \psi_{\mathcal{B}}$. O fato é que um *spinor* estabelece uma relação entre um observável e um sistema de referência através de $\mathbf{x} = \psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}} = \psi_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}'}$. Se transformamos ativamente apenas $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ e expressamos o resultado em termos da base \mathcal{B} como se esta estivesse “fixada” então há uma mudança de sinal *mas* se expressamos o resultado em termos da base transformada \mathcal{B}' então nada se altera. O que ocorre em termos da representação matricial é que as bases \mathcal{B} e \mathcal{B}' são “identificadas” no sentido em que tanto $\{\mathbf{e}_i\}$ como $\{\mathbf{e}'_i\}$ são representados pelas *mesmas* matrizes de Pauli $\{\sigma_i\}$, o que corresponde a manter a base “fixada”, e nesse caso necessariamente há uma mudança de sinal. A analogia que melhor traduz o que discutimos acima é, na nossa opinião, o do chamado *problema da tesoura de Dirac* [Dirac scissors problem], discutido, por exemplo, em [11].

VIII. A teoria de Pauli

O postulado básico da teoria de Pauli é que o elétron é descrito por um *campo de spinors* $\psi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{C}^2$ (que por simplicidade denotamos simplesmente por ψ) e tal que $\psi^\dagger\psi$ nos fornece, dentro da interpretação usual da MQ, a *densidade de probabilidade* $\rho(\mathbf{x}, t)$ de encontrarmos o elétron na posição \mathbf{x} no instante t . Este é o postulado básico da MQ com a diferença que ao invés de uma

¹Note que estamos considerando nessa discussão um *spinor*, e não um campo de *spinors* $\psi(\mathbf{X})$, caso este em que podemos usar diferentes coordenadas $\{x_i\}$ ou $\{y_i\}$ e pensar em $\psi(x_i) = \psi(y_i)$ como uma transformação passiva.

função de onda estamos considerando um campo de *spinors*. A justificativa usual no caso é que o elétron possui *spin*, e que para levarmos em consideração este grau de liberdade devemos usar o *spinor*, e nesse caso a densidade de *spin* é dada em componentes por $(\hbar/2)\psi^\dagger\sigma_i\psi$ ($i = 1, 2, 3$). Vamos analisar isto em detalhes, e para tal vamos usar a álgebra geométrica Cl_3 , que além de matematicamente coerente, possui um claro conteúdo geométrico, que esperamos possa nos revelar aspectos importantes da teoria de Pauli.

Consideremos um *campo de spinors operatoriais* de Pauli $\psi(\mathbf{x}, t) \in Cl_3^+$, que denotamos simplesmente ψ , omitindo inclusive a referência a uma dada base sempre que não houver risco de confusão. A *densidade de probabilidade* $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ é dada por

$$\rho = \psi\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\psi. \quad (189)$$

Da eq.(154) vemos que a densidade de probabilidade é definida-positiva ($\rho \geq 0$) e da eq.(156) que $\sqrt{\rho}$ é a *amplitude* do campo de *spinors* operatoriais ψ .

Como vimos das eqs.(158) e (161), a expressão $\psi^\dagger\sigma_i\psi$ nos fornece a i -ésima componente de um vetor, cuja expressão intrínseca pode ser escrita como $\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}$. Qualquer vetor pode ser escrito na forma $\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}$, onde ψ é um *spinor*, de modo que trabalhar com um *spinor* dentro de uma teoria *não significa* que na teoria estejamos *a priori* considerando qualquer coisa relacionada com *spin*. O *spin* entra dentro da teoria quando supomos que o elétron possui um *momento de dipolo magnético* $\boldsymbol{\mu}$ dado por $\boldsymbol{\mu} = (e/mc)\mathbf{s}$, onde o vetor \mathbf{s} é o momento angular intrínseco do elétron, que denominamos *spin*. Este fato *não* implica que *devemos* usar um *spinor* dentro da teoria.

Se o valor absoluto do momento angular intrínseco é $\hbar/2$, então $\mathbf{s} = (\hbar/2)\hat{\mathbf{s}}$, onde $\hat{\mathbf{s}}$ é um vetor unitário, e a *densidade de spin* $\rho\mathbf{s}$ pode ser escrita, usando um *spinor* ψ , na forma $(\hbar/2)\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}$, ou $\rho s_i = (\hbar/2)\langle\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi}\mathbf{e}_i\rangle_0 = (\hbar/2)\psi^\dagger\sigma_i\psi$. O *spin* entra portanto dentro da teoria quando interpretamos a quantidade

$$\rho\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi} \quad (190)$$

como a *densidade de spin* e quando interpretamos

$$\rho\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}\psi\mathbf{e}_3\tilde{\psi} \quad (191)$$

como a densidade de momento de dipolo magnético.

Nas expressões acima aparece *explicitamente* a escolha do “vetor de referência” \mathbf{e}_3 . Esse “vetor de referência” \mathbf{e}_3 determina uma direção no espaço que denominamos *direção* (ou *eixo*) *de quantização*. Note que a escolha da direção de quantização é completamente arbitrária. A escolha de uma outra direção determinada por $\mathbf{e}'_3 = U\mathbf{e}_3\tilde{U}$, $U \in \text{Spin}(3)$, implica que $\psi_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}} = \psi_{\mathcal{B}'}\mathbf{e}'_3\tilde{\psi}_{\mathcal{B}'}$ com $\psi_{\mathcal{B}'} = \psi_{\mathcal{B}}\tilde{U}$, e tanto $\psi_{\mathcal{B}}$ como $\psi_{\mathcal{B}'}$ podem ser representados pela mesma matriz colunar. É claro que isso não altera o vetor \mathbf{s} , mas as suas componentes são obviamente diferentes em função de diferentes direções de quantização.

Se o *campo de vetores* \mathbf{s} é *constante*, ou seja, não depende nem de \mathbf{x} nem de t , então dizemos que o elétron está em um *auto-estado de spin*. Nesse caso podemos convenientemente escolher a direção de quantização como sendo a direção do vetor \mathbf{s} . Se olharmos para a eq.(190) vemos que podemos escrever $\mathbf{s}\psi = (\hbar/2)\psi\mathbf{e}_3$, ou ainda $\mathbf{e}_3\mathbf{s}\psi = (\hbar/2)\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3$, e daí podemos definir o *operador multivetorial* \hat{S} como

$$\hat{S}[\psi] = \frac{\hbar}{2}\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3, \quad (192)$$

e dizer que temos um auto-estado de *spin* quando

$$\hat{S}[\psi] = \pm\frac{\hbar}{2}\psi. \quad (193)$$

Nesse caso $\hat{S}[\psi] = \mathbf{e}_3\mathbf{s}\psi = \pm(\hbar/2)\psi$, ou seja, $\mathbf{e}_3\mathbf{s} = \pm(\hbar/2)$, de onde segue que

$$\mathbf{s} = \pm\frac{\hbar}{2}\mathbf{e}_3, \quad (194)$$

que nos diz justamente que a direção de quantização coincide com a do *spin*. Do ponto de vista de $\psi \in \mathbb{C}^2$, uma vez que $\psi \simeq \psi f$ com $f = (1/2)(1 + \mathbf{e}_3)$ e $\mathbf{e}_3 f = f$, segue que $\hat{S}[\psi] = (\hbar/2)\sigma_3\psi$.

Quando estamos em um auto-estado de *spin* temos $\psi = \pm\mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3$, de onde segue que

$$\psi = \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3). \quad (195)$$

Note que se definirmos Σ_{\pm} através de

$$\Sigma_{\pm}[\psi] = \frac{1}{2}(\psi \pm \mathbf{e}_3\psi\mathbf{e}_3), \quad (196)$$

temos que os operadores Σ_{\pm} satisfazem

$$\Sigma_{\pm}\Sigma_{\pm} = \Sigma_{\pm}, \quad \Sigma_{\pm}\Sigma_{\mp} = \Sigma_{\mp}\Sigma_{\pm} = 0, \quad \Sigma_{+} + \Sigma_{-} = 1, \quad (197)$$

ou seja, Σ_{\pm} são *operadores de projeção*. Estes são os operadores de projeção de *spin*, de modo que

$$\hat{S}[\Sigma_{\pm}[\psi]] = \pm \frac{\hbar}{2} \Sigma_{\pm}[\psi]. \quad (198)$$

Consideremos agora o operador momentum. Definimos o *operador momentum* $\hat{\mathbf{p}}$ como

$$\hat{\mathbf{p}}[\psi] = -\hbar \nabla \psi \mathbf{e}_3 = \hbar \nabla \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1. \quad (199)$$

Não é difícil vermos que esta definição corresponde à usual em termos de ψ . De fato, para $\hat{\mathbf{p}}[\psi] = \mathbf{e}_k \hat{p}_k[\psi]$ temos as representações $\mathbf{e}_k \leftrightarrow \sigma_k$ e $\hat{p}_k \leftrightarrow -i\hbar \partial_k \psi$, que é a expressão conhecida.

Definimos a *densidade de momentum* $\rho \mathbf{p}$ através de

$$\rho \mathbf{p} = \langle \hat{\mathbf{p}}[\psi] \tilde{\psi} \rangle_1, \quad (200)$$

onde lembramos que $\langle \rangle_1$ indica a parte 1-vetor da expressão dada. Como veremos adiante, o uso do projetor $\langle \rangle_1 : \Lambda(\mathcal{E}^3) \rightarrow \Lambda^1(\mathcal{E}^3)$ é realmente necessário na expressão acima.

Definimos também o *operador energia*, no caso

$$\hat{E}[\psi] = \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{e}_3, \quad (201)$$

e a correspondente *densidade de energia* através de

$$\rho E = \langle \hat{E}[\psi] \tilde{\psi} \rangle_0. \quad (202)$$

No caso de um elétron livre, a chamada equação de Pauli escreve-se

$$\hat{E}[\psi] = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2[\psi], \quad (203)$$

ou seja,

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{e}_3 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (204)$$

No caso de um auto-estado de spin temos $\psi = \pm \mathbf{e}_3 \psi \mathbf{e}_3$, e nesse caso ψ deve ser da forma $\psi = r \exp(\mathbf{e}_3 \chi)$, de modo a equação de Pauli pode ser escrita nesse caso como $i\hbar(\partial \phi / \partial t) = (-\hbar^2 / 2m) \nabla^2 \phi$, onde $\phi = r \exp(i\chi)$, que é a equação de Schrödinger. Do ponto de vista da teoria de Pauli, a equação de Schrödinger descreve um elétron em um auto-estado de spin.

Vejam agora como escrever a equação de Pauli para o elétron no caso de interação com um campo eletromagnético externo. Lembremos que na teoria de Pauli supomos que o elétron possui um momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$, que por sua vez interage com um

campo magnético \mathbf{B} , interação esta com energia potencial $V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Para escrevermos a equação de Pauli nessa situação vamos voltar um pouco à questão da direção de quantização. Qualquer transformação $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}'_i = U \mathbf{e}_i \tilde{U}$, $U \in \text{Spin}(3)$, tal que $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$ não altera a direção de quantização. Uma rotação que não altera o vetor \mathbf{e}_3 é descrita por U da forma

$$U = \exp(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \alpha) = \exp(-\mathbf{e}_3 \alpha), \quad (205)$$

ou seja, é uma rotação no plano dos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Por outro lado, a única questão envolvida no cálculo de quantidades como ρ , \mathbf{s} , \mathbf{p} ou E é a escolha da direção de quantização \mathbf{e}_3 , de modo que a escolha dos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 é completamente *arbitrária*. Em outras palavras, as quantidades observáveis devem ser *invariantes* perante rotações dos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 .

No caso de uma rotação descrita por U acima, $\psi_{\mathcal{B}}$ deve se transformar em $\psi_{\mathcal{B}'}$ dado por

$$\psi_{\mathcal{B}'} = \psi_{\mathcal{B}} \exp(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \alpha) = \psi_{\mathcal{B}} \exp(\mathbf{e}_3 \alpha). \quad (206)$$

Note que essa transformação corresponde a

$$\psi \mapsto \psi \exp(i\alpha), \quad (207)$$

que é o que chamamos *mudança de fase*. A arbitrariedade na fase corresponde portanto à arbitrariedade na escolha dos vetores \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 uma vez fixada a direção de quantização \mathbf{e}_3 .

Tomando as expressões para ρ , \mathbf{s} , \mathbf{p} e E vemos que estas quantidades são invariantes perante a transformação de fase (206) quando α não depende nem de \mathbf{x} nem de t – caso este a que nos referimos como uma transformação *global* de fase do campo de *spinors* ψ . No caso de uma transformação *local* de fase – ou seja, $\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t)$ – as quantidades \mathbf{p} e E como as definimos não permanecem mais invariantes. Para definirmos quantidades invariantes introduzimos nesse caso campos “auxiliares”, que são os chamados campos de *gauge*. No caso em que $\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t)$ podemos verificar que ocorrem as seguintes transformações:

$$\rho \mathbf{p} \mapsto \rho \mathbf{p} + \hbar \nabla \alpha, \quad (208)$$

$$\rho E \mapsto \rho E - \hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad (209)$$

onde já vimos que $\nabla \alpha = \text{grad } \alpha$. Uma vez que o *momentum cinético* deve ser uma quantidade invariante,

introduzimos um campo vetorial \mathbf{A} que se transforma como

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \frac{\hbar c}{e} \nabla \alpha, \quad (210)$$

e definimos o *operador momentum cinético* $\hat{\mathbf{P}}$ como

$$\hat{\mathbf{P}}[\psi] = \hat{\mathbf{p}}[\psi] + \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi = -\hbar \nabla \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi. \quad (211)$$

O operador $\hat{\mathbf{p}}[\psi] = -\hbar \nabla \psi \mathbf{Ie}_3$ é o *operador momentum canônico* e a quantidade \mathbf{A} é interpretada como o *potencial vetor* eletromagnético. De maneira análoga, introduzimos um *campo escalar* W , que interpretamos como o *potencial escalar*, que se transforma como

$$W \mapsto W + \frac{\hbar c}{e} \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (212)$$

Definindo o *operador hamiltoniano* $\hat{\mathbf{H}}$ como

$$\hat{\mathbf{H}}[\psi] = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{P}}^2[\psi] - \frac{e}{c} W \psi, \quad (213)$$

podemos escrever a *equação de Pauli* para o elétron em um campo eletromagnético com potenciais escalar W e vetor \mathbf{A} na forma

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{Ie}_3 = \hat{\mathbf{H}}[\psi]. \quad (214)$$

Há um fato particularmente interessante e importante com relação a esta formulação, que é o fato de *não necessitarmos* postular a forma de *interação* do elétron com o campo eletromagnético. De fato, se tomarmos a expressão para $\hat{\mathbf{P}}[\psi]$ obteremos, após algumas manipulações, que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^2[\psi] &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{2e\hbar}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi \mathbf{Ie}_3 \\ &\quad - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi + \frac{e\hbar}{c} \mathbf{B} \psi \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (215)$$

onde $\mathbf{B} = -i\nabla \wedge \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \cdot \nabla = A_k \partial_k$. Por outro lado, com exceção do último termo no lado direito da equação acima, os demais provém de $\hat{\mathbf{P}}_k \hat{\mathbf{P}}_k[\psi]$, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_k \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{2e\hbar}{c} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi \mathbf{Ie}_3 \\ &\quad - \frac{e\hbar}{c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi \mathbf{Ie}_3 + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \psi, \end{aligned} \quad (216)$$

de modo que

$$\hat{\mathbf{P}}^2[\psi] = \hat{\mathbf{P}}_k \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] + \frac{e\hbar}{c} \mathbf{B} \psi \mathbf{e}_3. \quad (217)$$

Uma outra maneira de olharmos para o resultado acima é escrevendo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}^2[\psi] &= \mathbf{e}_j \hat{\mathbf{P}}_j [\mathbf{e}_k \hat{\mathbf{P}}_k[\psi]] = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \hat{\mathbf{P}}_j \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \\ &= (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \hat{\mathbf{P}}_j \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] + (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \hat{\mathbf{P}}_j \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \\ &= \hat{\mathbf{P}}_k \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] + (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{P}}_j \hat{\mathbf{P}}_k - \hat{\mathbf{P}}_k \hat{\mathbf{P}}_j)[\psi] \\ &= (\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}})[\psi] + (\hat{\mathbf{P}} \wedge \hat{\mathbf{P}})[\psi], \end{aligned} \quad (218)$$

onde introduzimos uma óbvia notação. Podemos, portanto, escrever a equação de Pauli na forma

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{Ie}_3 = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{P}})[\psi] - \frac{e}{c} W \psi + \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{B} \psi \mathbf{e}_3, \quad (219)$$

onde o último termo corresponde ao termo de interação usual $(e\hbar/2mc)(B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3)\psi$ [12].

Para podermos apreciar em detalhes o que está por detrás da equação de Pauli vamos primeiro olhar para o operador momentum cinético. Definimos $\langle \hat{\mathbf{P}}[\psi] \tilde{\psi} \rangle_1$ como a densidade de momentum cinético $\rho \mathbf{p}$, de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{p} &= \langle \hat{\mathbf{P}}[\psi] \tilde{\psi} \rangle_1 = \langle \mathbf{e}_k \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \tilde{\psi} \rangle_1 \\ &= \mathbf{e}_k \langle \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \tilde{\psi} \rangle_0 + \mathbf{e}_k \cdot \langle \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \tilde{\psi} \rangle_2. \end{aligned} \quad (220)$$

Vamos analisar os termos do lado direito. Se lembrarmos a eq.(156) temos

$$\partial_k \psi = \partial_k (\sqrt{\rho} R) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_k \rho}{\rho} + \Omega_k \right) \psi, \quad (221)$$

onde Ω_k ($k = 1, 2, 3$) são os 2-vetores de Darboux – eq.(140). Podemos, portanto, escrever

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \tilde{\psi} \rangle_2 &= -\hbar \langle \partial_k \psi \mathbf{Ie}_3 \tilde{\psi} \rangle_2 + \frac{e}{c} \langle A_k \psi \tilde{\psi} \rangle_2 \\ &= -\frac{\hbar}{2} \left\langle \left(\frac{\partial_k \rho}{\rho} + \Omega_k \right) \psi \mathbf{Ie}_3 \tilde{\psi} \right\rangle_2 \\ &= -\mathbf{I} \left\langle \left(\frac{\partial_k \rho}{\rho} + \Omega_k \right) \rho \mathbf{s} \right\rangle_1 \\ &= -\mathbf{I} [(\partial_k \rho) \mathbf{s} + \rho \partial_k \mathbf{s}] \\ &= -\mathbf{I} \partial_k (\rho \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (222)$$

onde usamos $\partial_k \mathbf{s} = \Omega_k \cdot \mathbf{s} = \langle \Omega_k \mathbf{s} \rangle_1$. Logo, temos

$$\mathbf{e}_k \cdot \langle \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \tilde{\psi} \rangle_2 = -\nabla \cdot (\mathbf{I} \rho \mathbf{s}) = \nabla \times (\rho \mathbf{s}), \quad (223)$$

onde usamos $\nabla \cdot (\mathbf{I} \rho \mathbf{s}) = \mathbf{I} \nabla \wedge (\rho \mathbf{s}) = -\nabla \times (\rho \mathbf{s})$. Note que a quantidade $(e/m) \nabla \times (\rho \mathbf{s}) = c \nabla \times (\rho \boldsymbol{\mu})$ é justamente a *densidade de corrente de magnetização* [13].

Quanto ao termo $\langle \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \tilde{\psi} \rangle_0$ temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{P}}_k[\psi] \tilde{\psi} \rangle_0 &= -\frac{\hbar}{2} \left\langle \left(\frac{\partial_k \rho}{\rho} + \Omega_k \right) \psi \mathbf{Ie}_3 \tilde{\psi} \right\rangle_0 + \frac{\rho e}{c} A_k \\ &= -\langle \Omega_k \mathbf{I} \rho \mathbf{s} \rangle_0 + \frac{\rho e}{c} A_k, \end{aligned} \quad (224)$$

ou,

$$\langle \hat{P}_k \tilde{\psi} \rangle_0 = \rho [-\langle \Omega_k \mathbf{S} \rangle_0 + \frac{e}{c} A_k], \quad (225)$$

onde definimos

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} \mathbf{s} = \star \mathbf{s} \quad (226)$$

como o 2-vetor *spin*. Para entendermos o significado da eq.(225), e em particular do termo $\langle \Omega_k \mathbf{S} \rangle_0$, vamos supor que o elétron está em um auto-estado de *spin*. Nesse caso ψ deve ser da forma $\psi = r \exp(\mathbf{I} \mathbf{e}_3 \chi)$, que fornece $\mathbf{s} = (\hbar/2) \mathbf{e}_3$, $\mathbf{S} = (\hbar/2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ e $\Omega_k = \partial_k \chi \mathbf{I} \mathbf{e}_3 = \partial_k \chi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$. Logo $\langle \Omega_k \mathbf{S} \rangle_0 = -(\hbar/2) \partial_k \chi$ e

$$\langle \hat{P}_k [\psi] \tilde{\psi} \rangle_0 - \frac{e}{c} A_k = \partial_k \left(\frac{\hbar}{2} \chi \right) = \partial_k \mathcal{A}. \quad (227)$$

Note que nesta expressão o vetor do lado esquerdo é dado por $\nabla \mathcal{A} = \text{grad } \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A} = (\hbar/2) \chi$ tem as dimensões de ação. Esta expressão é justamente a fórmula de de Broglie [14] para a velocidade do elétron dentro da teoria de Schrödinger (no caso em que $\mathbf{A} = 0$), ou seja, $\mathbf{u} = (1/m) \text{grad } \mathcal{A}$. Desse modo, se interpretamos

$$\rho m u_k = \langle \hat{P}_k [\psi] \tilde{\psi} \rangle_0, \quad (228)$$

onde $\rho \mathbf{u} = \mathbf{e}_k \rho u_k$ é a densidade de velocidade, temos finalmente

$$\rho \mathbf{p} = \rho m \mathbf{u} + \nabla \times (\rho \mathbf{s}). \quad (229)$$

O que a expressão acima nos diz é que em geral o momentum \mathbf{p} e a velocidade \mathbf{u} não são colineares dentro da teoria de Pauli. Isto, na verdade, não nos deve causar surpresa uma vez que é bem sabido [15] que no caso de partículas com *spin* o momentum e a velocidade não são colineares – mesmo no nível de uma teoria clássica. Note que mesmo em um auto-estado de *spin* temos em geral $\mathbf{p} \neq m \mathbf{u}$, pois se $\partial_k \mathbf{s} = 0$ então $\mathbf{p} = m \mathbf{u} + \rho^{-1} (\nabla \rho) \times \mathbf{s}$, onde o termo $\nabla \rho$ é um termo do tipo difusão, e $\mathbf{p} = m \mathbf{u}$ em um auto-estado de *spin* apenas se $(\nabla \rho) \times \mathbf{s} = 0$, onde um caso particular corresponde a $\nabla \rho = 0$ que é satisfeita pelas soluções do tipo ondas planas.

Usando os resultados acima podemos escrever uma expressão conveniente para $\hat{P}[\psi]$. Usando

$$\hat{P}[\psi] \tilde{\psi} = \langle \hat{P}[\psi] \tilde{\psi} \rangle_1 + \langle \hat{P}[\psi] \tilde{\psi} \rangle_3, \quad (230)$$

onde

$$\langle \hat{P}[\psi] \tilde{\psi} \rangle_1 = \mathbf{e}_k \langle \hat{P}_k [\psi] \tilde{\psi} \rangle_0 + \mathbf{e}_k \cdot \langle \hat{P}_k [\psi] \tilde{\psi} \rangle_2 \quad (231)$$

$$\langle \hat{P}_k [\psi] \tilde{\psi} \rangle_3 = \mathbf{e}_k \wedge \langle \hat{P}_k [\psi] \tilde{\psi} \rangle_2, \quad (232)$$

temos

$$\hat{P}[\psi] \tilde{\psi} = (\rho \mathbf{p} - \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \mathbf{s})), \quad (233)$$

que podemos escrever como

$$\hat{P}[\psi] = [m \mathbf{u} - \rho^{-1} \mathbf{I} \nabla \cdot (\rho \mathbf{s})] \psi, \quad (234)$$

ou

$$\hat{P}_k [\psi] = (m u_k - \mathbf{Q}_k) \psi, \quad (235)$$

onde definimos os 2-vetores

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{I} \rho^{-1} \partial_k (\rho \mathbf{s}) = \rho^{-1} \partial_k (\rho \mathbf{S}). \quad (236)$$

Usando a expressão acima para $\hat{P}_k [\psi]$ encontramos que

$$\begin{aligned} \hat{P}_k \hat{P}_k [\psi] &= -\hbar \partial_k (m u_k - \mathbf{Q}_k) \psi \mathbf{I} \mathbf{e}_3 + (m u_k - \mathbf{Q}_k) \hat{P}_k [\psi] \\ &= 2[-\nabla \cdot (m \mathbf{u}) + \partial_k \mathbf{Q}_k] \mathbf{S} \psi \\ &\quad + [(m \mathbf{u})^2 - 2m u_k \mathbf{Q}_k + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k] \psi \\ &= \{2[-\nabla \cdot (m \mathbf{u}) - (m \mathbf{u}) \cdot \nabla \ln \rho] + 2\partial_k \mathbf{Q}_k \\ &\quad + (m \mathbf{u})^2 \mathbf{S}^{-1} - 2((m \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S}^{-1}\} \mathbf{S} \psi, \end{aligned} \quad (237)$$

onde usamos $m u_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S}^{-1} = (m \mathbf{u} \cdot \nabla) \ln \rho + [(m \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{S}] \mathbf{S}^{-1}$ e $\mathbf{S}^{-1} = (2/\hbar)^2 \tilde{\mathbf{S}} = -(2/\hbar)^2 \mathbf{S}$.

Escrevendo de maneira análoga à eq.(221) que

$$\partial_t \psi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t \rho}{\rho} + \Omega_t \right) \psi, \quad (238)$$

podemos finalmente escrever a equação de Pauli usando as eqs.(237) e (238) na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial_t \rho}{\rho} + \Omega_t &= \frac{1}{m} [-\nabla \cdot (m \mathbf{u}) - (m \mathbf{u}) \cdot \nabla \ln \rho] \\ &\quad + \frac{1}{2m} [2\partial_k \mathbf{Q}_k + (m \mathbf{u})^2 \mathbf{S}^{-1} - 2((m \mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \\ &\quad + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S}^{-1}] - \frac{e}{c} W \mathbf{S}^{-1} - \frac{e}{mc} \mathbf{I} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (239)$$

Separando as partes escalar e 2-vetor dessa equação obtemos

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (240)$$

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \left[\frac{1}{2} m \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} + \frac{1}{2m} (2\partial_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S} + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k) \right] \mathbf{S}^{-1} \\ &\quad - \frac{e}{c} W \mathbf{S}^{-1} - \frac{e}{mc} \mathbf{I} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (241)$$

Uma vez que para a densidade de corrente de magnetização temos $\nabla \cdot (\nabla \times (\rho \mathbf{s})) = 0$, segue da eq.(229)

que a lei de conservação (240) pode também ser escrita como

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \frac{\mathbf{P}}{m}) = 0. \quad (242)$$

Na verdade, se procurarmos por uma lei de conservação através de um procedimento análogo ao que fazemos usualmente dentro da teoria de Schrödinger, ou seja, tomando a equação de Pauli (219) e multiplicando-a por $\tilde{\psi}$ e daí subtraindo desta o reverso da assim equação obtida, encontraremos como lei de conservação a eq.(242).

Da expressão para Ω_t podemos obter imediatamente a densidade de energia. Uma vez que

$$\rho E = \langle \hbar \partial_t \psi \mathbf{Ie}_3 \tilde{\psi} \rangle_0 = \rho \langle \Omega_t \mathbf{S} \rangle_0, \quad (243)$$

temos portanto

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{u}^2 + V_q - \frac{e}{c} W + \frac{e}{mc} \mathbf{B} \cdot \mathbf{s}, \quad (244)$$

onde definimos

$$V_q = \frac{1}{2m} \langle 2\partial_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S} + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k \rangle_0. \quad (245)$$

Dos termos da energia apenas V_q não apresenta uma interpretação óbvia. Usando o fato que $\langle \partial_k \mathbf{S} \mathbf{S} \rangle_0 = 0$ temos

$$\langle \partial_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{S}^2 \left[- \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 + \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} \right] + \langle \mathbf{S} \nabla^2 \mathbf{S} \rangle_0, \quad (246)$$

$$\langle \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k \rangle_0 = \mathbf{S}^2 \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 - \langle \mathbf{S} \nabla^2 \mathbf{S} \rangle_0, \quad (247)$$

de modo que

$$V_q = - \frac{\hbar^2}{8m} \left[2 \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m} \langle \mathbf{S} \nabla^2 \mathbf{S} \rangle_0, \quad (248)$$

ou ainda

$$V_q = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{1}{2m} \langle \mathbf{S} \nabla^2 \mathbf{S} \rangle_0. \quad (249)$$

No caso em que o elétron está em uma auto-estado de *spin* temos $V_q = -(\hbar^2/2m)(\nabla^2 \sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$, que reconhecemos como o chamado potencial quântico dentro da teoria de Schrödinger. O termo V_q é portanto o *potencial quântico* dentro da teoria de Pauli.

Outro resultado interessante que segue da eq.(241) é o seguinte. Para calcularmos

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} = \partial_t \mathbf{S} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} = \partial_t \mathbf{S} + u_k \partial_k \mathbf{S} \quad (250)$$

basta lembrarmos que

$$\partial_t \mathbf{S} = \frac{1}{2} [\Omega_t, \mathbf{S}] = \langle \Omega_t \mathbf{S} \rangle_2, \quad (251)$$

de modo que

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} = \langle \Omega_t \mathbf{S} \rangle_2 + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} = \langle [\Omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}) \mathbf{S}^{-1}] \mathbf{S} \rangle_2, \quad (252)$$

onde o termo entre colchetes é obtido diretamente da eq.(241). Temos portanto

$$\frac{D\mathbf{S}}{Dt} = \frac{1}{2m} \langle 2\partial_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S} + \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k \rangle_2 - \frac{e}{mc} \langle \mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{S} \rangle_2. \quad (253)$$

É fácil ver que $\langle \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k \rangle_2 = 0$ e que $\langle 2\partial_k \mathbf{Q}_k \mathbf{S} \rangle_2 = -\mathbf{I}[(\partial_k \mathbf{q}_k) \times \mathbf{s}]$, onde definimos $\mathbf{Q}_k = \mathbf{I} \mathbf{q}_k$. A eq.(253) pode ser escrita desse modo como

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{s}}{Dt} &= \frac{e}{mc} \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{1}{m} (\partial_k \mathbf{q}_k) \times \mathbf{s} \\ &= \frac{e}{mc} \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{1}{m} [\rho^{-1} (\nabla \rho \cdot \nabla) \mathbf{s} + \nabla^2 \mathbf{s}] \end{aligned} \quad (254)$$

ou ainda

$$\frac{D\mathbf{s}}{Dt} = \frac{e}{mc} \mathbf{B} \times \mathbf{s} - \frac{1}{m\rho} \partial_k (\rho \partial_k \mathbf{s} \times \mathbf{s}). \quad (255)$$

Existem muitos outros resultados interessantes que podem ser obtidos dentro da presente formulação da teoria de Pauli. Nesse ponto, entretanto, acreditamos que a consideração destes resultados está um pouco fora dos nossos objetivos iniciais. Para o leitor interessado sugerimos a referência [16].

IX. Conclusões

Nosso principal objetivo nesse artigo foi discutir a teoria de Pauli do elétron dentro de uma formulação moderna, poderosa e matematicamente coerente. Para isso introduzimos e discutimos a chamada álgebra geométrica (ou de Clifford) do espaço euclidiano Cl_3 .

Primeiro mostramos como a álgebra geométrica aparece naturalmente quando estudamos a geometria ortogonal no espaço euclidiano e como as operações algébricas possuem um claro significado geométrico. Nesse sentido a denominação álgebra geométrica se justifica plenamente uma vez que representamos elementos geométricos por elementos algébricos e operações geométricas por operações algébricas. Isso é possível porque a álgebra geométrica unifica os quaternions e a álgebra de Grassmann em um único sistema onde a estrutura multivetorial da álgebra de Grassmann permite

representarmos os elementos geométricos por multivetores e onde a generalização do produto de quaternions permite representar as operações geométricas em termos de um produto geométrico. A relação da álgebra geométrica com a álgebra vetorial de Gibbs foi discutida em detalhes, e mostramos que esta última apresenta sérias incoerências que são corrigidas dentro da álgebra geométrica. Mostramos também como todas as operações do cálculo vetorial baseado na álgebra vetorial de Gibbs são unificadas em uma única operação que é a ação do operador nabla, e aproveitamos esse fato para escrever as celebradas equações de Maxwell, que são quatro equações dentro da álgebra vetorial, na forma de uma única equação.

Discutimos e mostramos como as rotações apresentam uma simples representação dentro da álgebra geométrica. Introduzimos o grupo Spin(3) e mostramos que ele se trata do grupo de recobrimento duplo do grupo SO(3), e interpretamos o seu significado. Discutimos o conceito de *spinor* de Pauli sob três pontos de vista distintos, mas que mostramos equivalentes, ou seja, do ponto de vista da teoria de representações (como um elemento de \mathbb{C}^2), do ponto de vista algébrico (como um elemento de um ideal da forma Cl_{3f}), e do ponto de vista operacional (como um elemento de Cl_3). Neste último caso mostramos que um *spinor* de Pauli age sobre um vetor através de uma rotação e de uma dilatação. Utilizando essa visão operacional, discutimos a questão da transformação ativa de um *spinor*, e mostramos que questões como a mudança de sinal de um *spinor* após uma rotação de 2π possui uma clara interpretação. Discussões nessa direção para o caso do *spinor* de Dirac podem ser vistas em [17,18,19].

Finalmente mostramos como formular a teoria de Pauli usando a álgebra geométrica. Muitos dos aspectos abstratos da formulação usual desta teoria apresentam uma clara identificação geométrica neste formalismo. Além disso, resultados não tão evidentes na formulação usual mostraram-se triviais, como por exemplo a não-colinearidade do momentum e da velocidade através da identificação de uma corrente de magnetização devida ao *spin*. A identificação do potencial quântico dentro da teoria de Pauli é particularmente interessante, onde vimos que ele apresenta um termo que é exatamente o da teoria de Schrödinger e um termo de origem no *spin*.

É importante salientarmos que ao contrário da

álgebra vetorial de Gibbs, a álgebra geométrica generaliza-se trivialmente para outras dimensões. A álgebra geométrica do espaço-tempo de Minkowski é de fundamental importância, e sua consideração envolve generalizações triviais do que discutimos nesse artigo. Toda a cinemática relativística é formulada trivialmente dentro da álgebra geométrica do espaço-tempo, e a teoria relativística do elétron de Dirac apresenta uma formulação tão simples nesta álgebra como a de Pauli em termos da álgebra do espaço euclidiano. Para o leitor interessado na formulação da teoria de Dirac sugerimos a referência [20].

As álgebras geométricas possuem várias outras aplicações que não discutimos aqui. Nos limitaremos aqui a identificar algumas referências [21].

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer Prof. Dr. E. C. Oliveira e Prof. Dr. W. A. Rodrigues pela leitura do manuscrito, discussões e sugestões.

References

- [1] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, The Benjamin/Cummings Publ. Co. (1985).
- [2] A. Frydryszak, "Lagrangian models of particles with spin: the first seventy years", preprint hep-th 9601020.
- [3] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd. ed. 1891, Dover republication (1954).
- [4] S. Ferrara (ed.), *Supersymmetry*, North-Holland Publ. Co. (1987).
- [5] P. Lounesto, "Clifford Algebras, Relativity and Quantum Mechanics", em P. Letelier e W. A. Rodrigues (eds.), *Gravitation: The Spacetime Structure*, pg. 50, World Scientific (1994); "Clifford Algebras and Hestenes Spinors", *Found. Phys.*, **23**, 1203 (1993).
- [6] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press (1963).
- [7] J. Vaz Jr., "Use of Computer algebras and Clifford algebras in the teaching of Mathematical Physics", em publicação em R. Ablamowicz, P. Lounesto e J. M. Parra (eds.) *Clifford Algebras with CLICAL and other Computer Algebra Systems*, Kluwer Acad. Publ. (1996).
- [8] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd. ed., Addison-Wesley (1980).
- [9] D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley (1961).
- [10] J. E. Maiorino, J. R. R. Zeni e W. A. Rodrigues Jr., "Do neutron interferometric experiments imply that the neutron wave function is a Pauli c-spinor wave function", *Advances in Applied Clifford Algebras* **3**, 21 (1993).

- [11] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-time*, vol. I, Cambridge Univ. Press (1984).
- [12] V. A. Fock, *Princípios de Mecânica Quântica*, Editora Mir, Moscou (1986).
- [13] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons (1975).
- [14] L. de Broglie, *La Réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris (1971).
- [15] H. C. Corben, *Classical and Quantum Theories of Spinning Particles*, Hoden-Day, Inc. (1968).
- [16] D. Hestenes and R. Gurtler, "Local observables in quantum theory", *Am. J. Phys.*, **39**, 1028 (1971).
- [17] V. L. Figueiredo, E. C. de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., "Covariant, algebraic and operator spinors", *International Journal of Theoretical Physics* **29**, 371 (1990).
- [18] W. A. Rodrigues Jr., Q. A. G. de Souza e J. Vaz Jr., "Spinor fields and superfields as equivalence classes of exterior algebra fields", em *Clifford Algebras and Spinor Structures*, R. Ablamowicz e P. Lounesto (editores), pg. 177, Kluwer (1995).
- [19] W.A. Rodrigues Jr., Q.A.G. de Souza, Jayme Vaz Jr. and P. Lounesto "Dirac Hestenes Spinor Fields in Riemann-Cartan Spacetimes" *Int. J. Theor. Phys.* **35**, 1844 (1996).
- [20] D. Hestenes, "The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics", *Found. Phys.* **20**, 1213 (1990).
- [21] *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Proceedings of the 3rd. International Conference* F. Brackx, R. Delanghe e H. Serras (eds.), Kluwer Acad. Publ. (1993); *Proceedings of the 2nd. International Conference*, A. Micali, R. Boudet e J. Helms-tetter (eds.), Kluwer Acad. Publ. (1992); *Proceedings of the 1st. International Conference*, J. S. R. Chisholm and A. K. Common (eds.), D. Reidel Publ. Co. (1986).