MS580 – Introdução a Teoria *Fuzzy*
Marcos Eduardo Valle

Lista 9 – Equações Relacionais *Fuzzy*

Exercício 1. Seja $\to_\triangle$ a implicação residual de uma t-norma $\triangle$. Mostre que, se $a \leq b$, então $a \to_\triangle b = 1$.

Exercício 2. Seja $0 \leq \alpha < 1$ e $f : [0,1] \to [\alpha, 1]$ uma bijeção crescente. Defina o operador $\triangle_f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ da seguinte forma para todo $a, b \in [0,1]$:

$$a \triangle_f b = f^{-1}\big(f(a)f(b) \vee \alpha\big).$$

Mostre que $\triangle_f$ é uma t-norma e determine a expressão de sua implicação residual.

Exercício 3. Considere uma adjunção $(\triangle, \to)$. Mostre que $(a \triangle b) \to c = a \to (b \to c)$, para todo $a, b, c \in [0,1]$.

Exercício 4. Resolva, se possível, a equação relacional *fuzzy* $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 \\ 0.25 & 1.0 \end{bmatrix}$, em que $\circ$ denota:

(a) A composição max-min.

(b) A composição max-$\triangle_P$.

(c) A composição max-$\triangle_L$.

Exercício 5. Encontre a maior relação $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$ tal que $\mathcal{X} \circ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 \\ 1.0 & 0.4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$, em que $\circ$ denota:

(a) A composição max-min.

(b) A composição max-$\triangle_P$.

(c) A composição max-$\triangle_L$.

Definição 1 (Co-implicação *fuzzy*)**.** *Uma aplicação $J : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, também denotada por $J(a,b) = a \not\leftarrow b$, crescente no primeiro argumento e decrescente no segundo argumento é uma co-implicação fuzzy se satisfaz $J(0,0) = J(1,1) = 0$ e $J(0,1) = 1$.*

Exercício 6. Dada uma t-conorma $\triangledown$, mostre que o operador $J_\triangledown : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dado por

$$J_\triangledown(a,b) = \inf\{z \in [0,1] : a \triangledown z \geq b\},$$

é uma co-implicação, chamada **co-implicação residual de** $\triangledown$.

Exercício 7. Determine a co-implicação residual de:

(a) Máximo: $a \triangledown_M b = \max\{a, b\}$.

(b) Soma probabilística: $a \triangledown_P b = a + b - ab$.

(c) T-conorma de Lukasiewicz: $a \triangledown_L b = \min\{1, a + b\}$.

(d) T-conorma drástica: $a \bigtriangledown_D b = \begin{cases} b, & a = 0, \\ a, & b = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Definição 2. *Considere uma t-conorma* $\bigtriangledown$ *e uma co-implicação* $\not\to$. *Dizemos que o par* $(\bigtriangledown, \not\to)$ *forma uma adjunção se*

$$a \not\to x \leq b \quad \iff \quad x \leq a \bigtriangledown b,$$

para $a, b, x \in [0, 1]$.

Exercício 8. Mostre que a t-conorma drástica $\bigtriangledown_D$ não forma uma adjunção com sua co-implicação residual $a \not\to_D b = \inf\{z \in [0,1] : a \bigtriangledown_D z \geq b\}$.

Exercício 9. Considere uma adjunção $(\bigtriangledown, \not\to)$, em que $\bigtriangledown$ denota uma t-conorma e $\not\to$ uma co-implicação *fuzzy*. Dadas relações *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times W)$, mostre que a relação $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(V \times W)$ que satisfaz

$$\mathcal{Y} = \inf\{\mathcal{X} \in \mathcal{F}(V \times W) : \mathcal{R} \bullet \mathcal{X} \geq \mathcal{S}\},$$

é

$$\mathcal{Y}(v, w) = \sup_{u \in U} \big[\mathcal{R}(u, v) \not\to \mathcal{S}(u, w)\big].$$

Exercício 10. Resolva, se possível, a equação relacional *fuzzy* $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 \\ 0.25 & 1.0 \end{bmatrix}$, em que $\bullet$ denota:

(a) A composição min-max.

(b) A composição min-$\bigtriangledown_P$.

(c) A composição min-$\bigtriangledown_L$.

Exercício 11. Encontre a menor relação $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$ tal que $\mathcal{X} \bullet \begin{bmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 \\ 1.0 & 0.4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$, em que $\bullet$ denota:

(a) A composição min-max.

(b) A composição min-$\bigtriangledown_P$.

(c) A composição min-$\bigtriangledown_L$.

Exercício 12. Sejam $\bigtriangleup$, $\bigtriangledown$ e η respectivamente uma t-norma, uma t-conorma e uma negação forte. Mostre que,

$$\eta(a \bigtriangleup b) = \eta(a) \bigtriangledown \eta(b), \forall a, b \in [0,1] \quad \iff \quad \eta(a \to_\bigtriangleup b) = \eta(a) \not\to_\bigtriangledown \eta(b), \forall a, b \in [0,1],$$

em que $\to_\bigtriangleup$ e $\not\to_\bigtriangledown$ denotam respectivamente a implicação e co-implicação residual de $\bigtriangleup$ e de $\bigtriangledown$.