MS580 – Introdução a Teoria *Fuzzy*
Marcos Eduardo Valle

Lista 8 – Operações com Relações *Fuzzy*

Exercício 1. Considere as relações *fuzzy*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 1.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.9 & 1.0 & 0.3 \\ 1.0 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Determine a intersecção $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, a união $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ e os complementos $\mathcal{R}^c$ e $\mathcal{S}^c$ usando:

(a) O mínimo, o máximo e a negação usual.

(b) O produto $\triangle_P$, a soma probabilística $\bigtriangledown_P$ e a negação usual.

(c) A t-norma e t-conorma de Lukasiewicz ($\triangle_L$ e $\bigtriangledown_L$) e a negação usual.

Exercício 2. Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ do exercício anterior. Determine as composições $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \bullet \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \bullet \mathcal{R}$ usando:

(a) As composições max-min e min-max.

(b) As composições max-$\triangle_P$ e min-$\bigtriangledown_P$.

(c) As composições max-$\triangle_L$ e min-$\bigtriangledown_L$.

Exercício 3. Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = e^{-(x-y)^2},$$

que descreve o conceito "x está próximo de y". Determine a expressão para a relação $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dada pela composições sup-$\triangle_P$, ou seja, $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$. A relação $\mathcal{S}$ também descreve o conceito "x está próximo de y"?

Exercício 4. Mostre que as composições sup-min e inf-max satisfazem as seguintes propriedades para relações $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $\mathcal{Q} \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ e $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}(Z \times W)$.

(a) $\mathcal{P} \circ (\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}) \circ \mathcal{R}$ e $\mathcal{P} \bullet (\mathcal{Q} \bullet \mathcal{R}) = (\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q}) \bullet \mathcal{R}$ (associatividade)

(b) $\mathcal{Q} \circ (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = (\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{Q} \circ \mathcal{S})$ e $\mathcal{Q} \bullet (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) = (\mathcal{Q} \bullet \mathcal{R}) \cap (\mathcal{Q} \bullet \mathcal{S})$ (distributividade)

(c) $\mathcal{Q} \circ (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq (\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{Q} \circ \mathcal{S})$ e $(\mathcal{Q} \bullet \mathcal{R}) \cup (\mathcal{Q} \bullet \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{Q} \bullet (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})$ (distributividade fraca)

(d) Se $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ então $\mathcal{Q} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q} \circ \mathcal{S}$ e $\mathcal{Q} \bullet \mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q} \bullet \mathcal{S}$ (monotonicidade).

Exercício 5. Seja $\triangle$ uma t-norma. Mostre que se $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ é uma relação $\triangle$-transitiva e reflexiva, então $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

Exercício 6. O **fecho $\triangle$-transitivo** de uma relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ é a menor relação *fuzzy* $\mathcal{X} \in \mathcal{F}(U \times U)$ que é $\triangle$-transitiva e satisfaz $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{X}$. Dada uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$, o fecho $\triangle$-transitivo pode ser determinado da seguinte forma: Defina $\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n \cup (\mathcal{R}^n \circ \mathcal{R}^n)$, para $n = 0, 1, \ldots$. A sequência $\mathcal{R}^n$ converge para o fecho $\triangle$-transitivo de $\mathcal{R}$. Use esse estratégia para calcular o fecho $\wedge$-transitivo das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ do Exercício 1.