MS580 – Introdução a Teoria *Fuzzy*
Marcos Eduardo Valle

Lista – 7: Relações *Fuzzy*

Exercício 1. Sejam $U = \{1, 2, \ldots, 100\}$ e $V = \{50, 51, \ldots, 100\}$ e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ a relação fuzzy binária "u é muito menor que v" dada por

$$\mathcal{R}(u,v) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{u}{v}\right), & u \leq v, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para $u \in U$ e $v \in V$. Determine o domínio e a imagem de $\mathcal{R}$. Determine também a inversa $\mathcal{R}^{-1}$.

Exercício 2. Considere a relação binária fuzzy $\mathcal{R}_A \in \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ dada por

$$\mathcal{R}_A(x,y) = A(|x-y|; -1, 0, 1),$$

em que A é um número fuzzy triangular. É $\mathcal{R}_A$ uma relação de equivalência $\wedge$-fuzzy?

Exercício 3. Considere a relação binária fuzzy $\mathcal{R}_M : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$\mathcal{R}_M(x,y) = I_M(x,y) \wedge I_M(y,x), \quad \forall x, y \in [0,1],$$

em que I_M é a implicação fuzzy de Gödel. É $\mathcal{R}_M$ uma relação de equivalência $\wedge$-fuzzy?

Exercício 4. Sejam $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times U)$ duas relações de equivalência $\wedge$-fuzzy. Mostre que $\mathcal{W} \in \mathcal{F}(U \times U)$ dada por

$$W(u,v) = \mathcal{R}(u,v) \wedge \mathcal{S}(u,v), \quad \forall (u,v) \in U \times U,$$

é também uma relação de equivalência $\wedge$-fuzzy.

Exercício 5. Sejam $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ uma relação fuzzy binária e $\mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{F}(U \times U)$ sua inversa. Mostre ou dê um contra-exemplo:

(a) $\mathcal{R}$ é simétrica se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é simétrica.

(b) $\mathcal{R}$ é reflexiva se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é reflexiva.

(c) $\mathcal{R}$ é $\triangle$-transitiva se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é $\triangle$-transitiva.

(d) $\mathcal{R}$ é anti-simétrica se e somente se $\mathcal{R}^{-1}$ é anti-simétrica.

Exercício 6. Seja $d : U \times U \to [0,1]$ tal que

(i) $d(u,v) = 0$ se e somente se $u = v$.

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$, para todo $u, v \in U$.

(iii) $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ para todo $u, v, w \in U$.

Mostre que a relação fuzzy $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ dada por

$$\mathcal{R}(u,v) = 1 - d(u,v),$$

é uma relação de equivalência $\triangle_L$-fuzzy, em que $\triangle_L$ denota a t-norma de Lukasiewicz.

Exercício 7. Seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ uma relação de equivalência $\wedge$-fuzzy. Defina $d : U \times U \to [0,1]$ através da equação

$$d(u,v) = 1 - \mathcal{R}(u,v), \quad \forall u,v \in U.$$

Mostre que d é uma ultra-métrica, ou seja, d satisfaz:

(i) $d(u,v) \geq 0$.

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$.

(iii) $d(u,w) \leq \max\{d(u,v), d(v,w)\}$.

Exercício 8. Mostre que $\mathcal{R}_e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

$$\mathcal{R}_e(x,y) = e^{-|x-y|}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R},$$

é uma relação de equivalência $\triangle_P$-fuzzy, em que $a \triangle_P b = ab$.

Exercício 9. Uma relação clássica $E \subseteq U \times U$ é uma relação de equivalência em U se:

(i) $(u,u) \in E$ para todo $u \in U$.

(ii) $(u,v) \in E$ implica $(v,u) \in E$.

(iii) $(u,v) \in E$ e $(v,w) \in E$ implica $(u,w) \in E$.

Mostre que $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ é uma relação de equivalência $\wedge$-fuzzy se, e somente se, seus α-níveis $[\mathcal{R}]^\alpha$ são todos relações de equivalência em U.

Exercício 10. Encontre $\alpha \in [0,1]$ tal que o α-nível $[\mathcal{R}_e]^\alpha$ da relação de equivalência $\triangle_P$-fuzzy $\mathcal{R}_e$ do Exercício 8 não é uma relação de equivalência clássica. Esse resultado contradiz o Exercício 9?

Exercício 11. Seja $\triangle$ uma t-norma contínua e $\mathcal{R}_\triangle : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ a relação fuzzy dada por

$$\mathcal{R}_\triangle(x,y) = \sup\{z \in [0,1] : z \triangle (x \vee y) \leq x \wedge y\}.$$

Mostre que $\mathcal{R}_\triangle$ é uma relação de equivalência $\triangle$-fuzzy em $[0,1]$.