MS580 – Introdução a Teoria *Fuzzy*
Marcos Eduardo Valle

Lista – 6: Princípio de Extensão de Zadeh

Exercício 1. Considere os universos $U = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ e $V = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Considere a função $f : U \to V$, $f(n) = n^2$, e o conjunto *fuzzy* $A \in FU$

$$A = \{\underbrace{0.0}_{-3}, \underbrace{0.1}_{-2}, \underbrace{0.3}_{-1}, \underbrace{1.0}_{0}, \underbrace{0.2}_{1}, \underbrace{0.0}_{2}, \underbrace{0.0}_{3}\}.$$

Determine o conjunto *fuzzy* $\hat{f}(A) \in \mathcal{F}(V)$ obtido pela extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.

Exercício 2. Considere $U = 1,2,3,4$ e o conjunto *fuzzy*

$$A = \{\underbrace{0.1}_{1}, \underbrace{0.2}_{2}, \underbrace{0.3}_{3}, \underbrace{1.0}_{4}\}.$$

Dado o conjunto $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ e a função $f(x) = x+2$, determine o conjunto *fuzzy* $\hat{f}(A) \in \mathcal{F}(V)$, em que $f : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ denota a extensão de Zadeh de f.

Exercício 3. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \alpha x + \beta$, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$. Dado um número *fuzzy* triangular $A(x; a, m, b)$, determine o conjunto *fuzzy* $\hat{f}(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, em que $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ denota a extensão de Zadeh de f. É $\hat{f}(A)$ também um número *fuzzy* triangular?

Exercício 4. Sejam $f : U \to V$ uma função clássica e $A \in \mathcal{F}(U)$ um conjunto *fuzzy*. Mostre que a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ satisfaz $f\left([A]^\alpha\right) \subseteq \left[\hat{f}(A)\right]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Exercício 5. Considere $U = \mathbb{N}$, $V = \{a, b\}$ e a função $f : U \to V$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} a, & n \leq 10, \\ b, & n > 10. \end{cases}$$

Sejam $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ é a extensão de Zadeh de f e $A \in \mathcal{F}(U)$ é o conjunto *fuzzy* dado por

$$A(n) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determine $\left[\hat{f}(A)\right]^1$ e $f([A]^1)$, e conclua que $\left[\hat{f}(A)\right]^\alpha \neq f([A]^\alpha)$ para $\alpha = 1$.

Exercício 6. Mostre que a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ de uma função clássica (*crisp*) $f : U \to V$ satisfaz:

(a) $\hat{f}(A) = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$.

(b) Se $A_1 \subseteq A_2$, então $\hat{f}(A_1) \subseteq \hat{f}(A_2)$.

Exercício 7. Sejam $f : U \to V$ uma função clássica e $\hat{f} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ sua extensão de Zadeh. Considere uma família infinita de conjuntos *fuzzy* $A_i \in \mathcal{F}(U)$, para $i \in \mathbb{N}$. Mostre que:

(a) $\hat{f}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{f}(A_i)$.

(b) $\hat{f}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \hat{f}(A_i)$.