MS580 – Introdução a Teoria *Fuzzy*
Marcos Eduardo Valle

Lista – 2: Igualdade de Inclusão *Fuzzy*

Exercício 1. Considere uma t-conorma $\triangledown$ e uma negação *fuzzy* η. Mostre que a aplicação $I_{\triangle,\eta} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$I_{\triangle,\eta}(a,b) = \eta(a) \triangledown b,$$

é uma implicação *fuzzy*, chamada **S-implicação**.

Exercício 2. Encontre a S-implicação obtida considerando:

(a) A t-conorma de Lukasiewicz $\triangledown_L$ e a negação usual $\eta_S(a) = 1 - a$.

(b) O máximo e a negação usual.

(c) A t-conorma drástica $\triangledown_D$ e a negação usual.

Exercício 3. Mostre que a implicação de Gödel não é uma S-implicação obtida usando uma negação forte, ou seja, dada uma negação forte η, não existe uma t-conorma $\triangledown$ tal que $I_M(a,b) = \eta(a) \triangledown b$ para todo $a, b \in [0,1]$.

Exercício 4. Considere uma implicação *fuzzy* $\to$ e defina a aplicação $Inc_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0,1]$ através da equação

$$Inc_{\mathcal{F}}(A,B) = \inf_{u \in U} \Big[A(u) \to B(u) \Big].$$

Mostre que $Inc_{\mathcal{F}}$ é uma medida de inclusão *fuzzy*.

Exercício 5. Mostre que, se S é uma medida *subsethood* e $\triangle$ é uma t-norma, então a aplicação Sim_S dada por

$$Sim_S(A,B) = S(A,B) \triangle S(B,A),$$

é uma medida de similaridade *fuzzy*.

Exercício 6. Considere conjuntos *fuzzy* A, B e C definidos em um universo de discurso finito $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{10}\}$ da seguinte forma:

$$A = \{\underbrace{0.0}_{u_1}, \underbrace{0.0}_{u_2}, \underbrace{0.0}_{u_3}, \underbrace{0.0}_{u_4}, \underbrace{0.4}_{u_5}, \underbrace{0.6}_{u_6}, \underbrace{0.8}_{u_7}, \underbrace{1.0}_{u_8}, \underbrace{0.8}_{u_9}, \underbrace{0.6}_{u_{10}}\},$$
$$B = \{\underbrace{0.0}_{u_1}, \underbrace{0.0}_{u_2}, \underbrace{0.0}_{u_3}, \underbrace{0.0}_{u_4}, \underbrace{0.4}_{u_5}, \underbrace{0.5}_{u_6}, \underbrace{0.6}_{u_7}, \underbrace{1.0}_{u_8}, \underbrace{0.6}_{u_9}, \underbrace{0.4}_{u_{10}}\},$$
$$C = \{\underbrace{0.0}_{u_1}, \underbrace{1.0}_{u_2}, \underbrace{0.2}_{u_3}, \underbrace{0.3}_{u_4}, \underbrace{0.4}_{u_5}, \underbrace{0.5}_{u_6}, \underbrace{0.6}_{u_7}, \underbrace{1.0}_{u_8}, \underbrace{0.5}_{u_9}, \underbrace{0.0}_{u_{10}}\}.$$

Determine $Inc_{\mathcal{F}}(A,B)$, $Inc_{\mathcal{F}}(B,C)$ e $Inc_{\mathcal{F}}(A,C)$ usando

(a) A implicação de Lukasiewicz.

(b) A implicação de Gödel.

(c) A implicação de Kleene-Dienes.

Exercício 7. Considere os conjuntos *fuzzy* A, B e C do Exercício **??**. Determine $Sim_S(A,B)$, $Sim_S(B,C)$ e $Sim_S(A,C)$ usando as medidas *subsethood* $S^{\cap}$ e $S^{\cup}$ com:

(a) O máximo e o mínimo.

(b) A t-norma e t-conorma de Lukasiewicz.

(c) A t-norma e t-conorma drástica.

Exercício 8. Considere conjuntos *fuzzy* A e B dados pelas seguintes equações para qualquer $u \in U = \{0, 1, \ldots, 10\}$:

$$A(u) = \frac{u}{u+1} \quad \text{e} \quad B(u) = 1 - \frac{u}{10}.$$

Determine $S^{\cap}(A, B)$ e $S^{\cup}(A, B)$ usando o mínimo e o máximo.

Exercício 9. Considere conjuntos *fuzzy* A e B definidos num universo de discurso finito $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Mostre que a aplicação $S_K : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$, chamada **medida *subsethood* de Kosko**, dada por

$$S_K(A, B) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \max\{0, A(u_i) - B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n} A(u_i)}, & A \neq \emptyset, \\ 1, & A = \emptyset. \end{cases}$$

é de fato uma medida *subsethood*. Determine $S_K(A, B)$, em que A e B são os conjuntos fuzzy do Exercício 8.

Exercício 10. Mostre que a medida *subsethood* de Kosko S_K é uma medida *subsethood* $S^{\cap}$ em que a união é determinada pelo mínimo.

Exercício 11 (Medida de Similaridade de Gregson)**.** Considere um universo de discurso finito $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Defina a aplicação $Sim_G : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$ através da seguinte forma para qualquer $A, B \in \mathcal{F}(U)$:

$$Sim_G(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \min\{A(u_i), B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n} \max\{A(u_i), B(u_i)\}}.$$

Mostre que Sim_G é uma medida de similaridade, chamada **medida de similaridade de Gregson**. Determine $Sim_G(A, B)$, em que A e B são os conjuntos *fuzzy* do Exercício 8.

Exercício 12 (Medida de Similaridade de Eisler e Ekman)**.** Considere um universo de discurso finito $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Defina a aplicação $Sim_E : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$ através da seguinte forma para qualquer $A, B \in \mathcal{F}(U)$:

$$Sim_E(A, B) = \frac{2 \sum_{i=1}^{n} \min\{A(u_i), B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n} A(u_i) + \sum_{i=1}^{n} B(u_i)}.$$

Mostre que Sim_E é uma medida de similaridade, chamada **medida de similaridade de Eisler e Ekman**. Determine $Sim_E(A, B)$, em que A e B são os conjuntos *fuzzy* do Exercício 8.

Exercício 13. Considere um universo de discurso finito $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Defina a aplicação $Sim_H : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$ através da seguinte forma para qualquer $A, B \in \mathcal{F}(U)$:

$$Sim_H(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |A(u_i) - B(u_i)|.$$

Mostre que Sim_H é uma medida de similaridade. Determine $Sim_H(A, B)$, em que A e B são os conjuntos *fuzzy* do Exercício 8.