



Lista – 1: Conjuntos *Fuzzy* e Suas Operações de União, Intersecção e Complemento.

Exercício 1. Considere as seguintes situações:

- (a) O número esperado de estudantes que tomam o ônibus circular da moradia estudantil, sentido campus, num certo horário.
- (b) O número de estudantes que podem tomar o ônibus circular da moradia estudantil, sentido campus, num certo horário.

Ambas situações envolvem um cenário incerto. Qual das duas situações usa probabilidade? Qual das duas situações envolve *fuzzy*? Justifique sua resposta.

Exercício 2. Suponha que desejamos descrever a temperatura de um ambiente, por exemplo uma sala do Ciclo Básico, usando os seguintes termos: **muito frio, frio, confortável, quente, muito quente**. Escolha um universo de discurso apropriado e represente esses termos usando (a) conjuntos clássicos e (b) conjuntos *fuzzy*.

Exercício 3. Suponha que a velocidade permitida nas ruas de Campinas varia entre 0 e 60km/h. Neste contexto, descreva os termos **velocidade baixa, velocidade média e velocidade alta** usando (a) conjuntos clássicos e (b) conjuntos *fuzzy*.

Exercício 4. Considere conjuntos *fuzzy* triangulares dados por $A(x; 1, 2, 3)$ e $B(x; 2, 3, 4)$.

- (a) Determine a união $A \cup B$ e a intersecção $A \cap B$ usando o máximo e o mínimo, respectivamente.
- (b) Determine o complementos A^c e B^c usando a negação usual $\eta_S(x) = 1 - x$.
- (c) Determine a união $A^c \cup B^c$ e a intersecção $A^c \cap B^c$ usando a t-norma e t-conorma de Lukasiwicz, respectivamente.

Nos itens (a)-(c), apresente a fórmulas para as funções de pertinência dos conjuntos *fuzzy* obtidos.

Exercício 5. Mostre que lei do terceiro excluído e a lei da não contradição são válidas considerando a t-norma drástica Δ_D , t-conorma drástica ∇_D e uma negação *fuzzy* forte.

Exercício 6. Considere t-norma drástica Δ_D , a t-conorma drástica ∇_D e a negação *fuzzy* usual $\eta_S(x) = 1 - x$. É $(\Delta_D, \nabla_D, \eta)$ uma tripla de DeMorgan?

Exercício 7. Sejam Δ e ∇ respectivamente uma t-norma e uma t-conorma. Mostre que, para qualquer $a \in [0, 1]$, tem-se $a \Delta 0 = 0$ e $a \nabla 1 = 1$.

Exercício 8. Seja Δ uma t-norma e η uma negação *fuzzy* forte. Mostre que a operação $\nabla_{\Delta, \eta} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$a \nabla_{\Delta, \eta} b = \eta(\eta(a) \Delta \eta(b)), \quad \forall a, b \in [0, 1],$$

é uma t-conorma, chamada **t-conorma dual de Δ com respeito a η** .

Determine a t-conorma dual de Δ_L com respeito a negação de Sugeno $\eta_\lambda(x) = (1 - x)/(1 + \lambda x)$. Determine também a t-conorma dual de Δ_P com respeito a negação de Yager $\eta_w(x) = \sqrt[w]{1 - x^w}$.

Exercício 9. Sejam η uma negação *fuzzy* forte, Δ uma t-norma e ∇ uma t-conorma. Mostre que

$$\eta(a) \Delta \eta(b) = \eta(a \nabla b), \forall a, b \in [0, 1] \iff \eta(a) \nabla \eta(b) = \eta(a \Delta b), \forall a, b \in [0, 1].$$

Exercício 10. Mostre que a função $N_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$N_a(x) = \begin{cases} 1, & x < a, \\ 0, & x \geq a, \end{cases}$$

para algum $a \in (0, 1]$, é uma negação *fuzzy*. É N_a uma negação *fuzzy* forte?

Exercício 11. As negações *fuzzy* de Sugeno e Yager, dadas respectivamente por

$$\eta_\lambda(x) = (1 - x)/(1 + \lambda x) \quad \text{e} \quad \eta_w(x) = \sqrt[w]{1 - x^w},$$

são negações *fuzzy* fortes?

Exercício 12. Considere as negações η_λ e η_w de Sugeno e Yager. Mostre que $(\vee, \wedge, \eta_\lambda)$ e (\vee, \wedge, η_w) são triplas de DeMorgan.

Exercício 13. Determine se a função N_s dada por

$$N_s(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \text{sen} \left[\pi(2x + 1)/2 \right] \right\},$$

é uma negação *fuzzy*.

Exercício 14. Considere a conjunção *fuzzy* de Kleene-Dienes \mathcal{C}_K e defina $\mathcal{D}_K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ através da equação

$$\mathcal{D}_K(a, b) = \eta(\mathcal{C}_K(\eta(a), \eta(b))), \quad \forall a, b \in [0, 1],$$

em que η_s denota a negação *fuzzy* usual. Mostre que \mathcal{D}_K é uma disjunção *fuzzy* e determine sua expressão.

Exercício 15. Sejam Δ e ∇ uma t-norma e uma t-conorma, respectivamente. Mostre que

$$a \Delta_D b \leq a \Delta b \leq a \wedge b \leq a \vee b \leq a \nabla b \leq a \nabla_D b,$$

para quaisquer $a, b \in [0, 1]$.

Exercício 16 (T-norma nilpotente). Como as t-normas são associativas, podemos escrever $a^{[2]} = a \Delta a$ e $a^{[n]} = a \Delta a^{[n-1]}$ para todo $n = 3, 4, \dots$. Uma t-norma é dita **nilpotente** se, dado $a \in [0, 1]$, existe um inteiro n tal que $a^{[n]} = 0$. Mostre que a t-norma de Lukasiewicz é nilpotente.

Exercício 17. Seja Δ uma t-norma e $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma bijeção crescente. Mostre que $\Delta_h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$a \Delta_h b = h^{-1}(h(a) \Delta h(b)), \quad \forall a, b \in [0, 1],$$

em que h^{-1} denota a inversa de h , é também uma t-norma.

Considere $h(x) = x^w$, $w \in (0, +\infty)$. Determine Δ_h considerando $\Delta = \wedge$, $\Delta = \cdot$, $\Delta = \Delta_L$ e $\Delta = \Delta_D$.

Exercício 18. Suponha que o conjunto *fuzzy* dos jovens seja dada por

$$J(x) = \left(1 - \left(\frac{x}{120} \right)^2 \right)^4, \quad x \in U = [0, 120].$$

- (a) Defina o conjunto fuzzy dos idosos como o complemento do conjunto fuzzy dos jovens usando a negação usual $\eta_S(x) = 1 - x$.
- (b) Esboce, na mesma figura, as funções de pertinências dos conjuntos dos jovens e idosos.
- (c) Determine a idade de um indivíduo de “meia-idade”, ou seja, com grau 0.5 tanto no conjunto dos jovens como dos idosos.