Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 23 – Conjuntos *Fuzzy* como Pontos no Hipercubo.

Marcos Eduardo Valle

Pontos no Hipercubo

Se $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é um universo de discurso finito, então um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ pode ser identificado com um vetor $[a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$, em que $a_j = A(u_j)$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

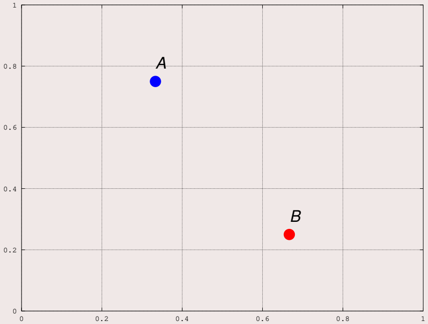
Em outras palavras, quando U é finito, a família de todos os conjuntos *fuzzy* $\mathcal{F}(U)$ corresponde ao hipercubo $[0, 1]^n$.

Um conjunto *fuzzy* pode ser visto como um ponto no hipercubo.

Um conjunto clássico de U pode ser identificado com um vértice do hipercubo.

Exemplo 1

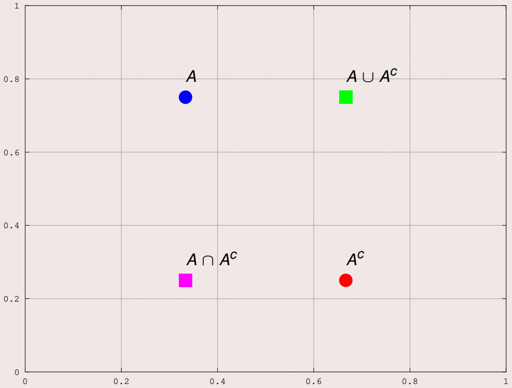
Se $U = \{u_1, u_2\}$, então $\mathcal{F}(U)$ pode ser identificado com o quadrado unitário $[0, 1] \times [0, 1]$.



Os conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(U)$ tais que $A(u_1) = 1/3$, $A(u_2) = 3/4$, $B(u_1) = 2/3$ e $B(u_2) = 1/4$, correspondem aos pontos $A = [1/3, 3/4]$ e $B = [2/3, 1/4]$.

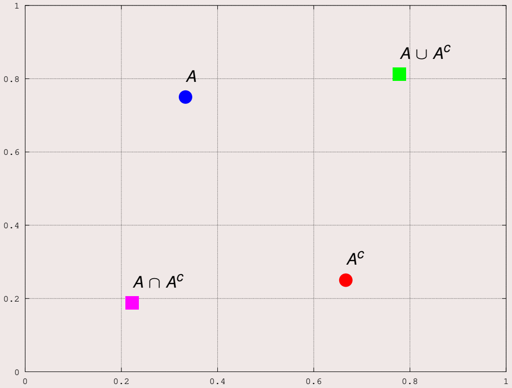
Exemplo 2

As operações de união, intersecção e complemento dos conjuntos *fuzzy* do exemplo anterior podem ser visualizadas como segue usando máximo, mínimo e a negação usual.



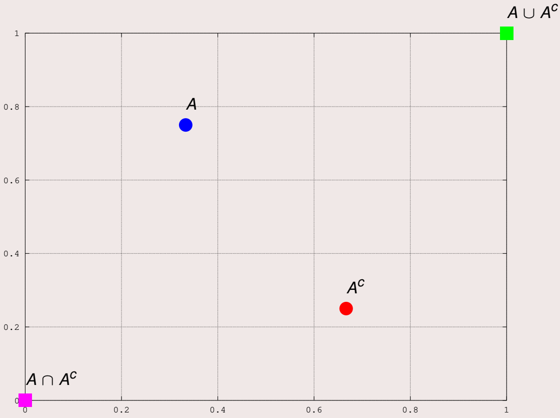
Exemplo 3

Abaixo a interpretação da união, intersecção e complemento usando produto, soma probabilística e a negação usual.



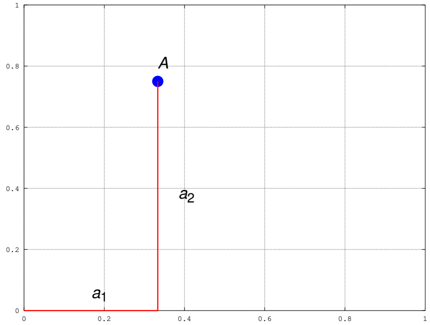
Exemplo 4

Finalmente, a interpretação visual da união, intersecção e complemento usando a t-norma, t-conorma de Lukasiewicz e a negação usual.



Cardinalidade

A cardinalidade de um conjunto *fuzzy* $A = [a_1, \ldots, a_n] \in [0, 1]^n$, dado pelo somatório $Card(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, corresponde à distância do conjunto vazio $\emptyset$ e A usando a soma dos valores absolutos (norma-1).



O Ponto Médio do Hipercubo e Entropia *Fuzzy*

O ponto médio $[1/2, 1/2, \ldots, 1/2]$ corresponde ao único conjunto *fuzzy* que é igual aos seu complemento usando a negação usual. Ele também é o único ponto equidistante de cada um dos 2^n vértices do hipercubo.

O ponto médio pode ser visto como o conjunto "mais" *fuzzy* do hipercubo!

A entropia mede o quão *fuzzy* é um conjunto A.

Definição 5

Uma aplicação $E : \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$ é chamada entropia *fuzzy* se:

- $E(A) = 0$ se, e somente se, A é um conjunto clássico.
- $E(A) = 1$ se $A(u) = 1/2$ para todo $u \in U$.

Exemplo 6 (Entropia de Kosko)

A seguinte função, definida usando o máximo, o mínimo e a negação usual, é uma entropia:

$$E_K(A) = \frac{Card(A \cap A^c)}{Card(A \cup A^c)}.$$

Determine a entropia do conjunto *fuzzy* $A = [1/3, 3/4]$.

Exemplo 6 (Entropia de Kosko)

A seguinte função, definida usando o máximo, o mínimo e a negação usual, é uma entropia:

$$E_K(A) = \frac{Card(A \cap A^c)}{Card(A \cup A^c)}.$$

Determine a entropia do conjunto *fuzzy* $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta:

$$E(A) = \frac{7}{17} \approx 0.41.$$

Exemplo 7

Seja $\sigma : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0,1]$ uma medida de similaridade forte. A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$E_\sigma(A) = \sigma(A \cup A^c, A \cap A^c).$$

Dada a similaridade de similaridade de Gregson

$$\sigma_G(A,B) = \begin{cases} 1, & A \cup B = 0, \\ \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i}{\sum_{i=1}^n a_i \vee b_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a negação usual, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Exemplo 7

Seja $\sigma : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0,1]$ uma medida de similaridade forte. A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$E_\sigma(A) = \sigma(A \cup A^c, A \cap A^c).$$

Dada a similaridade de similaridade de Gregson

$$\sigma_G(A,B) = \begin{cases} 1, & A \cup B = 0, \\ \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i \wedge b_i}{\sum_{i=1}^n a_i \vee b_i}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a negação usual, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta:

$$E_\sigma(A) = \frac{7}{17} \approx 0.41.$$

Exemplo 8

Seja $h : [0,1] \to [0,1]$ uma função tal que:

- $h(0) = h(1) = 0$ e $h(1/2) = 1$.
- h é estritamente crescente em $[0, 1/2)$ e estritamente decrescente em $(1/2, 1]$.

A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$H_h(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(a_i).$$

Dada a função $h(x) = 4(1-x)x$, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Exemplo 8

Seja $h : [0,1] \to [0,1]$ uma função tal que:

- $h(0) = h(1) = 0$ e $h(1/2) = 1$.
- h é estritamente crescente em $[0, 1/2)$ e estritamente decrescente em $(1/2, 1]$.

A entropia de um conjunto *fuzzy* $A \in [0,1]^n$ pode ser definida da seguinte forma:

$$H_h(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(a_i).$$

Dada a função $h(x) = 4(1-x)x$, determine a entropia de $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta:

$$E_h(A) = \frac{59}{72} \approx 0.81.$$

Composição Relação-Conjunto

Considere $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy*.

A composição sup-$\triangle$ define uma aplicação $r : [0,1]^n \to [0,1]^m$ dada por

$$r(A) = A \circ \mathcal{R} \quad \Longleftrightarrow \quad r(A)_j = \bigvee_{i=1}^{n} \left(a_i \triangle r_{ij}\right), \quad \forall j = 1, \ldots, m,$$

em que $A = [a_1, \ldots, a_n] \in [0,1]^n$ e $\mathcal{R} = (r_{ij}) \in [0,1]^{n \times m}$.

Observe que r transforma um ponto no hipercubo $[0,1]^n$ em um ponto no hipercubo $[0,1]^m$.

Exemplo 9

Considere a composição max-min e a relação *fuzzy*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Determine a composição $A \circ \mathcal{R}$ em que $A = [1/3, 3/4]$.

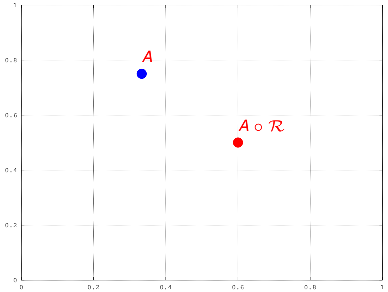
Exemplo 9

Considere a composição max-min e a relação *fuzzy*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Determine a composição $A \circ \mathcal{R}$ em que $A = [1/3, 3/4]$.

Resposta: $A \circ \mathcal{R} = [0.6, 0.5]$. Visualmente, temos



Exemplo 10

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \circ \mathcal{R}$ obtido considerando a composição max-$\triangle_L$, em que $\triangle_L$ denota a t-norma de Lukasiewicz.

Exemplo 10

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}$$

determine o conjunto *fuzzy* $A \circ \mathcal{R}$ obtido considerando a composição max-$\triangle_L$, em que $\triangle_L$ denota a t-norma de Lukasiewicz.

Resposta: O conjunto *fuzzy* $A \circ \mathcal{R}$ corresponde ao vetor

$$A \circ \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 11

Considere universos finitos $U = \{u_1, u_2\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ e o reticulado completo residuado $\langle [0,1], \vee, \wedge, \triangle_L, \rightarrow_L, 0, 1 \rangle$. Dada a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(V)$, representados por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

determine o maior conjunto *fuzzy* A tal que $A \circ \mathcal{R} \leq B$.

Lembre-se que $a \triangle_L b = 0 \vee (a + b - 1)$ e $a \rightarrow_L b = 1 \wedge (1 - a + b)$. Além disso, tem-se

$$a \triangle b \leq c \iff a \leq b \rightarrow_L c.$$

Resposta: Primeiramente, observe que

$$
\begin{aligned}
A \circ \mathcal{R} \leq B \quad &\iff \quad (A \circ \mathcal{R})_j \leq b_j, \quad \forall j = 1,2,3 \\
&\iff \quad \bigvee_{i=1}^{2} (a_i \vartriangle_L r_{ij}) \leq b_j, \quad \forall j = 1,2,3 \\
&\iff \quad a_i \vartriangle_L r_{ij} \leq b_j, \quad \forall j = 1,2,3 \quad \text{e} \quad \forall i = 1,2 \\
&\iff \quad a_i \leq r_{ij} \rightarrow_L b_j, \quad \forall j = 1,2,3 \quad \text{e} \quad \forall i = 1,2 \\
&\iff \quad a_i \leq \bigwedge_{j=1}^{3} (r_{ij} \rightarrow_L b_j), \quad \forall i = 1,2.
\end{aligned}
$$

Em particular, temos

$$
\begin{aligned}
a_1 &\leq (1.0 \rightarrow_L 0.8) \wedge (0.5 \rightarrow_L 0.4) \wedge (0.8 \rightarrow_L 0.9) \\
&= 0.8 \wedge 0.9 \wedge 1.0 = 0.8.
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos

$$
a_2 \leq (0.1 \rightarrow_L 0.8) \wedge (0.4 \rightarrow_L 0.4) \wedge (0.9 \rightarrow_L 0.9) = 1.0.
$$

Concluindo, o maior conjunto *fuzzy* A tal que $A \circ \mathcal{R} \leq B$ é

$$A^* = [0.8, 1.0].$$

Considerações Finais

A interpretação de um conjunto *fuzzy* como um ponto do hipercubo pode facilitar o entendimento de muitos conceitos na teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Por exemplo, ela pode ser usada para entender algumas medidas de inclusão, *subsethood* e similaridade *fuzzy*.

Na aula de hoje, em particular, vimos como interpretar geometricamente a união, a intersecção, a negação, a cardinalidade, a entropia *fuzzy* e a composição sup-$\triangle$.

Muito grato pela atenção!