Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 22 – Transformada *Fuzzy*.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

As transformadas *fuzzy* foram introduzidas por I. Perfilieva no artigo intitulado "Fuzzy Transforms: Theory and Applications", publicado pela revista *Fuzzy Sets and Systems* em 2006.

Aplicações da transformada *fuzzy* inclui processamento de imagens, previsão de séries temporais, resolução de problemas de valor inicial e de contorno *fuzzy*.

Ideia:

Transformar uma função real $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ em um vetor do $\mathbb{R}^n$ usando conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy.

Partição Fuzzy

Definição 1 (Partição Fuzzy)

Considere nós $\pi : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ e, por simplicidade, suponha que $x_0 < a$ e $x_{n+1} > b$. Dizemos que uma família de conjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forma uma partição de $[a, b]$ sobre π se, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

- $A_k : [a, b] \to [0, 1]$ com $A_k(x_k) = 1$.
- $A_k(x) = 0, x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}]$.
- A_k é contínua.
- A_k é crescente em $[x_{k-1}, x_k]$ e decrescente em $[x_k, x_{k+1}]$.
- $\sum_{k=1}^{n} A_k(x) = 1$, para todo $x \in [a, b]$.

Partição Fuzzy

Definição 2 (Partição Fuzzy Uniforme)

Uma partição fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uniforme se os nós $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são equidistantes, isto é, $x_k = a + h(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, e

- $A_k(x_k - x) = A_k(x_k + x)$.
- $A_k(x) = A_{k-1}(x - h)$ e $A_{k+1}(x) = A_k(x - h)$.

em que as condições acima devem ser adaptadas de forma consistente para A_1 e A_n.

Observação 1

Numa partição fuzzy uniforme são impostas restrições tanto nos nós $x_1, \ldots, x_n$ como nos conjuntos fuzzy $A_1, \ldots, A_n$.

Transformada Fuzzy

Definição 3 (Transformada Fuzzy Direta)

Considere uma partição fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $[a, b]$ e $f \in \mathcal{C}([a, b])$. O vetor $\mathbf{F}_n[f] = [F_1, \ldots, F_n]^T \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$F_k = \frac{\int_a^b f(x) A_k(x) dx}{\int_a^b A_k(x) dx}, \forall k = 1, \ldots, n,$$

é a transformada fuzzy (Transformada-F) de f com respeito à partição $A_1, \ldots, A_n$.

Observação 2

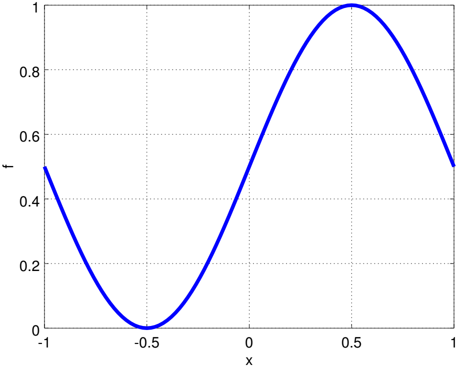
Lembre-se que $\mathcal{C}([a, b])$ denota a classe de todas as funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Exemplo - 1

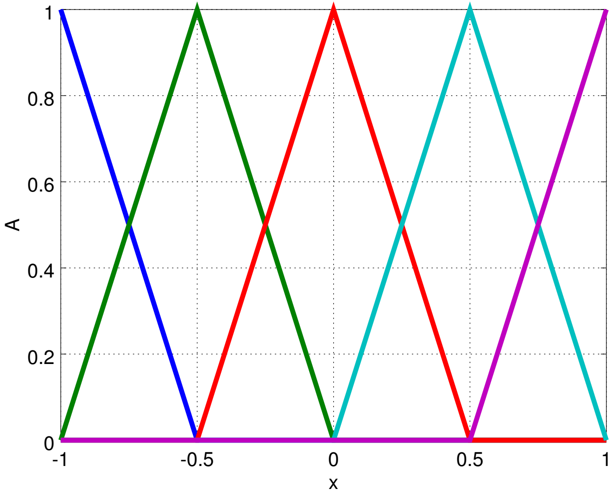
Considere a função

$$f(x) = \frac{1 + \text{sen}(\pi x)}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

cujo gráfico é mostrado abaixo:



Considere também os nós $x_k = -1 + (k-1)/2$ e a partição uniforme $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_5\}$ mostrada abaixo:



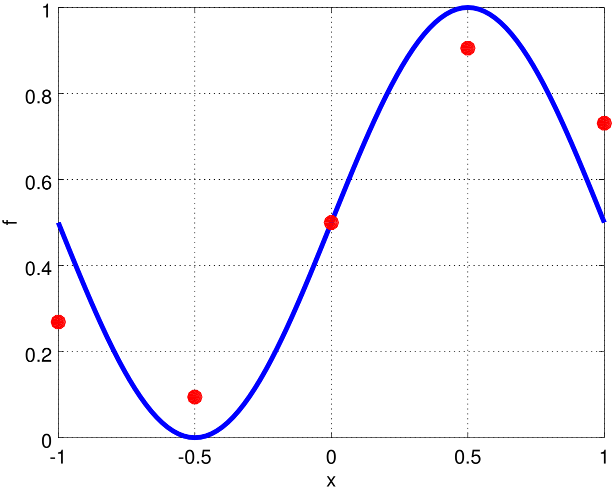
Nesse caso, temos

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1+\text{sen}(\pi x)}{2} A_1(x)dx}{\int_{-1}^{1} A_1(x)dx} \\
&= 2\int_{-1}^{1} \big(1 + \text{sen}(\pi x)\big)(-2x+1)dx \\
&= \frac{8 - 4\pi + \pi^2}{2\pi^2} \approx 0.27.
\end{aligned}
$$

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$
\mathbf{F}_n[f] = [0.27, 0.09, 0.50, 0.91, 0.73]^T.
$$

A figura abaixo mostra o gráfico de f e os pontos (x_k, F_k).



Transformada Fuzzy

Propriedades:

- **Linearidade:**

$$\mathbf{F}_n\left[\alpha f+\beta g\right]=\alpha\mathbf{F}_n\left[f\right]+\beta\mathbf{F}_n\left[g\right].$$

- **Valores Médios Ponderados:**
  O coeficiente F_k de $\mathbf{F}_n\left[f\right]$ minimiza

$$\Phi(y)=\int_a^b (f(x)-y)^2 A_k(x)dx.$$

Outras propriedades são apresentadas na literatura.

Transformada Fuzzy Inversa

Pergunta - Resposta

É possível reconstruir a função f usando sua transformada fuzzy?
Não, mas a função reconstruída pode aproximar a função original!

Definição 4 (Transformada Fuzzy Inversa)

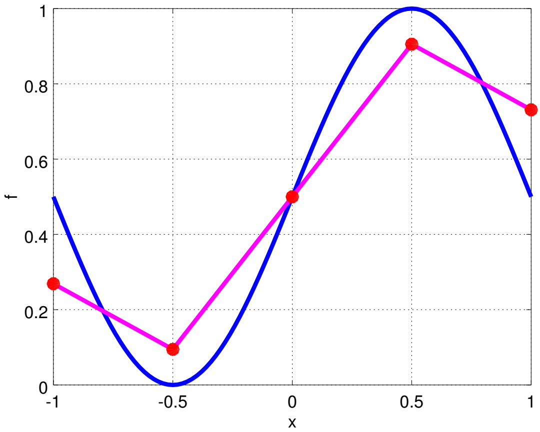
Considere uma partição fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $[a, b]$ e $\mathbf{F} = [F_1, \ldots, F_n]^T$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. A função $f_{F,n}$ dada por

$$f_{F,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k A_k(x), \forall x \in [a, b],$$

é chamada transformada fuzzy inversa.

Exemplo - 1 (continuação)

A figura abaixo mostra o gráfico de f, os pontos (x_k, F_k) e a transformada inversa $f_{F,n}$, que é uma função linear por partes.



Propriedade de Aproximação

Teorema 5

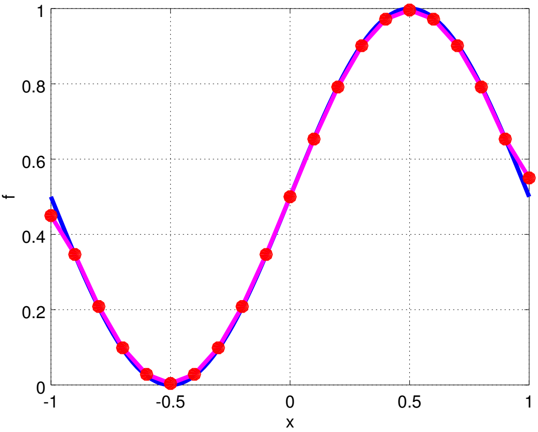
Seja $f \in \mathcal{C}([a,b])$*. Dado* $\epsilon > 0$*, existe* n_ϵ *e uma partição fuzzy* $A_1, \ldots, A_{n_\epsilon}$ *de* $[a,b]$ *tal que*

$$|f(x) - f_{F,n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [a,b],$$

em que e $f_{F,n_\epsilon}(x)$ *é a transformada fuzzy inversa de* $\mathbf{F}_n[f]$

Exemplo - 1 (continuação)

A figura abaixo mostra f, os pontos (x_k, F_k) e a transformada inversa $f_{F,n}$ obtida usando uma partição com $x_k = -1 + (k-1)/10$.



Transformada Fuzzy em Reticulados Completos

Definição 6 (Cobertura Fuzzy)

Uma família de conjuntos fuzzy $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ é uma cobertura de $[a, b]$ se

$$\forall x \in [a, b], \exists k : A_k(x) > 0.$$

Definição 7 (Transformada $F^{\uparrow}$)

Sejam $\langle [0, 1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ um reticulado completo residuado, $f : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ e $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma cobertura de $[a, b]$. A transformada $F^{\uparrow}$ de f com respeito à cobertura $\mathcal{A}$ é o vetor $\mathbf{F}_n^{\uparrow}[f] = [F_1^{\uparrow}, \ldots, F_n^{\uparrow}]^T$ dado pela equação

$$F_k^{\uparrow} = \bigvee_{x \in [a,b]} [A_k(x) \vartriangle f(x)], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Propriedades da Transformada $F^{\uparrow}$.

- **"Linearidade":**

$$\mathbf{F}_n^{\uparrow}[(\alpha \vartriangle f) \vee (\beta \vartriangle g)] = (\alpha \vartriangle \mathbf{F}_n^{\uparrow}[f]) \vee (\beta \vartriangle \mathbf{F}_n^{\uparrow}[g]).$$

- **Monotonicidade:**

$$f \leq g \quad \text{implica} \quad \mathbf{F}_n^{\uparrow}[f] \leq \mathbf{F}_n^{\uparrow}[g] .$$

- **Mínimo de um Conjunto:**
  A componente $F_k^{\uparrow}$ de $\mathbf{F}_n^{\uparrow}[f]$ é o menor elemento do conjunto

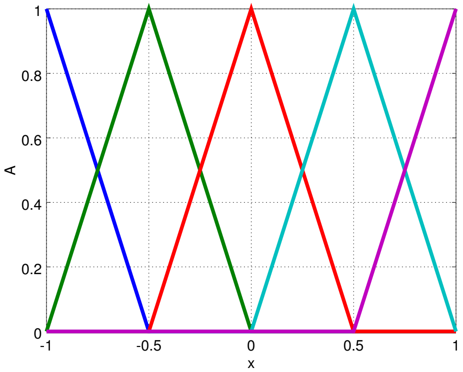
$$\mathcal{S}_k = \{z \in [0,1] : A_k(x) \leq (f(x) \to z)\, , \forall x \in [a,b]\}.$$

Exemplo - 1

Considere a função

$$f(x) = \frac{1 + \text{sen}(\pi x)}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

e a seguinte cobertura $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_5\}$ do intervalo $[-1, 1]$



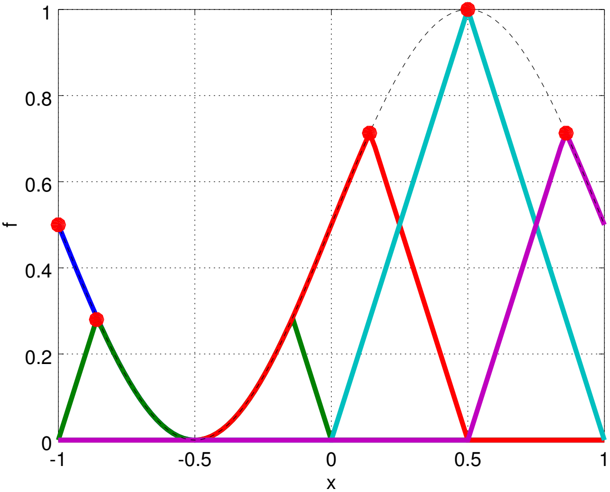
Usando a t-norma do mínimo, temos

$$F_1^{\uparrow} = \bigvee_{x \in [a,b]} [A_1(x) \vartriangle f(x)]$$
$$= \bigvee_{x \in [a,b]} \left[(-2x-1) \wedge \left(\frac{1+\operatorname{sen}(\pi x)}{2}\right)\right] = 0.5.$$

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\mathbf{F}_n[f] = [0.50, 0.28, 0.71, 1.00, 0.71]^T.$$

A figura abaixo mostra o gráfico de $f \vartriangle A_k$ e os pontos $(t_k, F_k^{\uparrow})$, onde t_k são os pontos que produziram o supremo (máximo).



Transformada Fuzzy $F^{\uparrow}$ Inversa

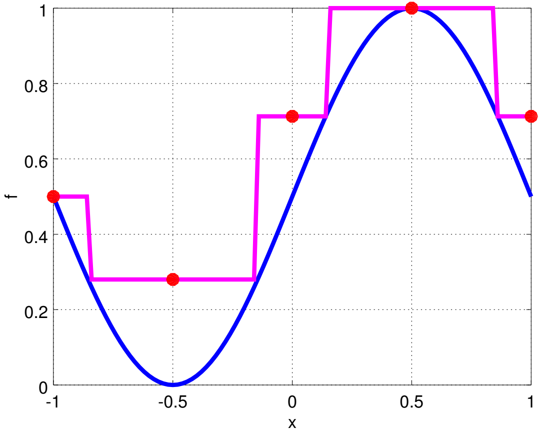
Definição 8 (Transformada $F^{\uparrow}$ Inversa)

A transformada inversa de $\mathbf{F}^{\uparrow} = [F_1^{\uparrow}, \ldots, F_n^{\uparrow}]^T$ é a dada por

$$f_{F,n}^{\uparrow}(x) = \bigwedge_{k=1}^{n} \left(A_k(x) \rightarrow F_k^{\uparrow} \right), \quad \forall x \in [a, b].$$

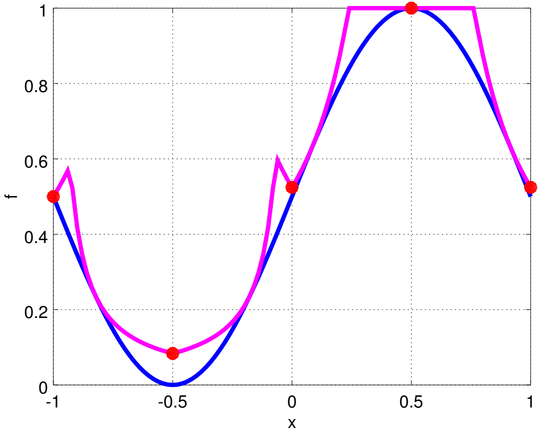
Exemplo - 2 (continuação)

A figura abaixo mostra o gráfico de f, os pontos $(x_k, F_k^{\uparrow})$ e a transformada inversa $f_{F,n}^{\uparrow}$.



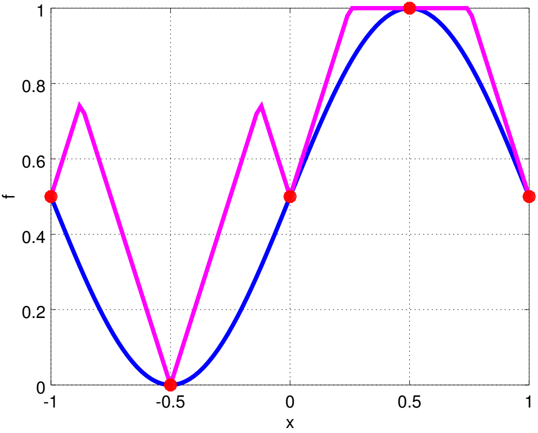
Exemplo - 3

A figura abaixo mostra o gráfico de f, os pontos $(x_k, F_k^{\uparrow})$ e a transformada inversa $f_{F,n}^{\uparrow}$ obtida utilizando a t-norma do produto.



Exemplo - 4

A figura abaixo mostra o gráfico de f, os pontos $(x_k, F_k^{\uparrow})$ e a transformada inversa $f_{F,n}^{\uparrow}$ obtida utilizando Lukasiewicz.



Propriedades da Transformada Fuzzy $F^{\uparrow}$

- **Aproximação por cima:**
  Se $f^{\uparrow}_{F,n}$ é a transformada $F^{\uparrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\uparrow}_n[f]$, então
  $$f^{\uparrow}_{F,n}(x) \geq f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$
- **Idempotência:**
  Se $f^{\uparrow}_{F,n}$ é a transformada $F^{\uparrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\uparrow}_n[f]$, então
  $$F^{\uparrow}_k = \bigvee_{x \in [a,b]} A_k(x) \vartriangle f^{\uparrow}_{F,n}(x).$$
- **Elemento Maximal:**
  A transformada $F^{\uparrow}$ inversa $f^{\uparrow}_{F,n}$ é o maior elemento do conjunto $\Phi^{\uparrow}_{F,n}$ de todas as funções que possuem a mesma transformada $F^{\uparrow}$, ou seja, $f, g \in \Phi^{\uparrow}_{F,n}$ se $\mathbf{F}^{\uparrow}_n[f] = \mathbf{F}^{\uparrow}_n[g]$.

Transformada $F^{\downarrow}$ e sua Inversa.

Definição 9 (Transformada $F^{\downarrow}$ e sua Inversa)

Sejam $\langle [0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ um reticulado completo residuado, $f : [a,b] \rightarrow [0,1]$ e $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma cobertura de $[a,b]$. A transformada $F^{\downarrow}$ de f com respeito à cobertura $\mathcal{A}$ é o vetor $\mathbf{F}_n^{\downarrow}[f] = [F_1^{\downarrow}, \ldots, F_n^{\downarrow}]^T$ dado por

$$F_k^{\downarrow} = \bigwedge_{x \in [a,b]} [A_k(x) \rightarrow f(x)], \quad k = 1, \ldots, n.$$

A transformada inversa de $\mathbf{F}^{\downarrow} = [F_1^{\downarrow}, \ldots, F_n^{\downarrow}]^T$ é a dada por

$$f_{F,n}^{\downarrow}(x) = \bigvee_{k=1}^{n} \left(A_k(x) \vartriangle F_k^{\downarrow} \right), \quad \forall x \in [a,b].$$

Propriedades da Transformada $F^{\downarrow}$.

- **"Linearidade":**

$$\mathbf{F}_n^{\downarrow}[(\alpha \to f) \wedge (\beta \to g)] = (\alpha \to \mathbf{F}_n^{\downarrow}[f]) \wedge (\beta \to \mathbf{F}_n^{\downarrow}[g]).$$

- **Monotonicidade:**

$$f \leq g \quad \text{implica} \quad \mathbf{F}_n^{\downarrow}[f] \leq \mathbf{F}_n^{\downarrow}[g]\,.$$

- **Máximo de um Conjunto:** A componente $F_k^{\downarrow}$ de $\mathbf{F}_n^{\downarrow}[f]$ é o maior elemento do conjunto

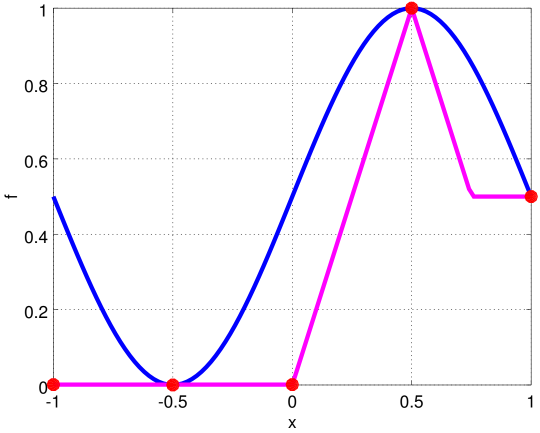
$$\mathcal{T}_k = \{z \in [0,1] : A_k(x) \leq (z \to f(x))\,, \forall x \in [a,b]\}.$$

Propriedades da Transformada $F^{\downarrow}$.

- **Aproximação por baixo:**
  Se $f_{F,n}^{\downarrow}$ é a transformada $F^{\downarrow}$ inversa de $\mathbf{F}_n^{\downarrow}[f]$, então
  $$f_{F,n}^{\downarrow}(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$
- **Idempotência:**
  Se $f_{F,n}^{\downarrow}$ é a transformada $F^{\downarrow}$ inversa de $\mathbf{F}_n^{\downarrow}[f]$, então
  $$F_k^{\downarrow} = \bigwedge_{x \in [a,b]} \left(A_k(x) \rightarrow f_{F,n}^{\downarrow}(x) \right).$$
- **Elemento Minimal:**
  A transformada $F^{\downarrow}$ inversa é o menor elemento do conjunto $\Phi_{F,n}^{\downarrow}$ de todas as funções que possuem a mesma transformada $F^{\downarrow}$.

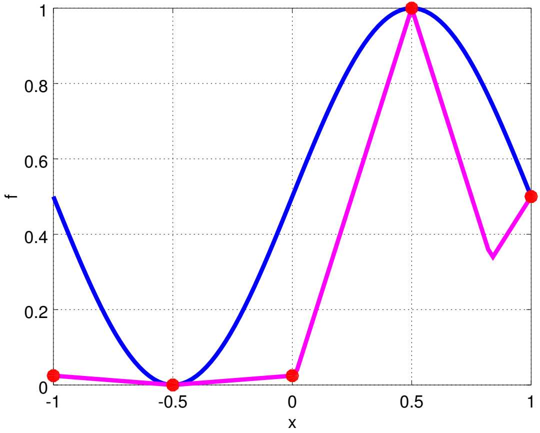
Exemplo - 5

A figura abaixo mostra o gráfico de f, os pontos $(x_k, F_k^{\downarrow})$ e a transformada inversa $f_{F,n}^{\downarrow}$ obtidos usando o mínimo.



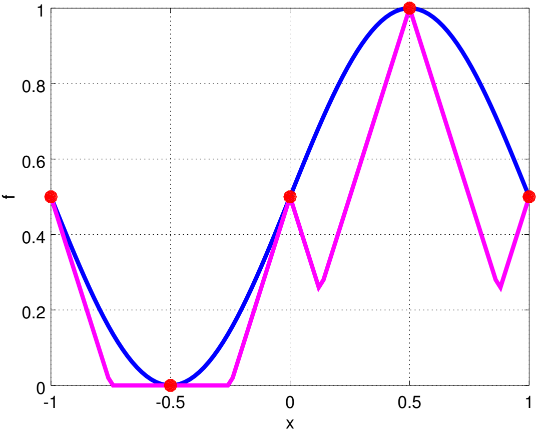
Exemplo - 6

A figura abaixo mostra o gráfico de f, os pontos $(x_k, F_k^{\downarrow})$ e a transformada inversa $f_{F,n}^{\downarrow}$ obtidos usando o produto.



Exemplo - 7

A figura abaixo mostra o gráfico de f, os pontos $(x_k, F_k^{\downarrow})$ e a transformada inversa $f_{F,n}^{\downarrow}$ obtidos usando Lukasiewicz.



Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos a transformada fuzzy, que possui aplicações em diversas áreas incluindo processamento de imagens e solução de problemas de valor inicial e de contorno fuzzy.

Em termos gerais, uma transformada fuzzy transforma uma função real f em um vetor usando conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy.

As principais propriedades e exemplos ilustrativos foram apresentados na aula de hoje.

Muito grato pela atenção!