# Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

## Aula 20 – Introdução aos Sistemas Dinâmicos *Fuzzy*.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Sistemas dinâmicos *fuzzy* surgem de um modo natural quando estudamos um ambiente dinâmico com incertezas do tipo *fuzzy*.

---

Por exemplo, podemos considerar o modelo de Malthus, descrito por

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em que o parâmetro $\lambda$, que representa a taxa de crescimento, ou a densidade populacional inicial $x_0$ são números *fuzzy*.

---

Na aula de hoje, veremos brevemente uma abordagem para esse tipo de problema.

# Problema de Valor Inicial *Fuzzy*

Um problema de valor inicial *fuzzy* (PVIF) será escrito como:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

em que $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um número *fuzzy* e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

A principal diferença na modelagem usando a teoria dos conjuntos *fuzzy* está no modo como definimos (ou interpretamos) a derivada de uma função envolvendo conjuntos *fuzzy*.

Esse é um campo ativo de pesquisa e apresentaremos uma abordagem baseada na chamada derivada de Hukurara.

# Motivação para a Derivada de Hukuhara

A derivada de uma função real $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ em $t \in (a, b)$ é definida pela seguinte equação se o limite existir:

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Observe que um conceito chave para a derivada é a diferença $f(t+h) - f(t)$.

A derivada de Hukuhara é definida considerando uma certa diferença de números *fuzzy*!

# Diferença de Hukurara

Na Aula 4, apresentamos operações aritméticas com números *fuzzy*.

Em particular, observamos que a diferença de dois números *fuzzy* pode ser diferente de zero, ou seja, $A - A \neq 0$ para certos $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

A diferença de Hukuhara é definida de modo a evitar esse problema:

**Definição 1 (Diferença de Hukuhara)**

A diferença de Hukuhara, denotada por "$\ominus$", é definida da seguinte forma para números *fuzzy* $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$:

$$A \ominus B = C \iff A = B + C,$$

em que $+$ denota a soma usual de números *fuzzy*.

A diferença de Hukuhara nem sempre existe. Quando ela existe, porém, seus $\alpha$-níveis satisfazem

$$[A \ominus B]^\alpha = [a_I^\alpha - b_I^\alpha, a_S^\alpha - b_S^\alpha], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

em que $[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_I^\alpha, b_S^\alpha]$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Na prática, usamos a equação acima para calcular a diferença de Hukuhara.

Posteriormente, usando o teorema da representação de Ralescu-Negoita, verificamos se o resultado é, de fato, um número *fuzzy*.

# Derivada de Hukuhara

Com base na diferença de Hukuhara, tem-se:

**Definição 2 (Derivada de Hukuhara)**

A derivada de Hukuhara de uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ em $t$ é definida através da seguinte equação quando o limite existir:

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) \ominus f(t)}{h}.$$

Sendo $f:(a,b)\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ um número *fuzzy* para cada $t\in(a,b)$, temos

$$[f(t)]^\alpha = [f_I^\alpha(t), f_S^\alpha(t)], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Dessa forma, para cada $\alpha$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é representada por duas funções $f_I^\alpha, f_S^\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}$.

---

O seguinte teorema apresenta uma forma para calcular a derivada de Hukuhara considerando as funções $f_I^\alpha$ e $f_S^\alpha$:

**Teorema 3**

*Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dada por $[f(t)]^\alpha = [f_I^\alpha(t), f_S^\alpha(t)]$, para todo $\alpha\in[0,1]$, com $f_I^\alpha$ e $f_S^\alpha$ funções continuamente diferenciáveis com respeito a $t$. Nesse caso, tem-se*

$$\left[\frac{df}{dt}(t)\right]^\alpha = \left[\frac{df_I^\alpha}{dt}(t), \frac{df_S^\alpha}{dt}(t)\right], \quad \forall \alpha\in[0,1].$$

## Exemplo 4

Determine a derivada de Hukuhara da função $f(t) = At$, $t \geq 0$, em que $A$ é um número *fuzzy* tal que $[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

## Exemplo 4

Determine a derivada de Hukuhara da função $f(t) = At$, $t \geq 0$, em que $A$ é um número *fuzzy* tal que $[A]^\alpha = [a_I^\alpha, a_S^\alpha]$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

**Resposta:**

$$\frac{df}{dt}(t) = A, \quad \forall t \geq 0.$$

Em termos gerais, resolver um PVIF

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

com a derivada de Hukuhara consistem em resolver, para cada $\alpha$, dois PVIs clássicos: um para $f_I^\alpha$ e outro para $f_S^\alpha$!

## Exemplo 5

Determine os $\alpha$-níveis da solução do modelo Malthusiano com taxa de crescimento $\lambda > 0$ e condição inicial $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3, a solução do PVIF do Exemplo 5 é uma função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ cujos $\alpha$-níveis $[x(t)]^\alpha = [x_I^\alpha(t), x_S^\alpha(t)]$, para $\alpha \in [0,1]$, satisfazem os seguintes PVIs (classicos):

$$\begin{cases} \frac{dx_I^\alpha}{dt} = \lambda x_I^\alpha, \\ x_I^\alpha(t_0) = x_{I0}, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{dx_S^\alpha}{dt} = \lambda x_S^\alpha, \\ x_S^\alpha(t_0) = x_{S0}, \end{cases}$$

em que $[x_0]^\alpha = [x_{0I}^\alpha, x_{0S}^\alpha]$. Logo, temos

$$[x(t)]^\alpha = \left[x_{0I}^\alpha e^{\lambda t}, x_{0S}^\alpha e^{\lambda t}\right] = e^{\lambda t}\,[x_0]^\alpha\,, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Equivalentemente,

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}.$$

## Exemplo 6

Determine os $\alpha$-níveis da solução do modelo abaixo, que representa uma população em retração, com $\lambda > 0$ e condição inicial $x_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

A solução do PVIF do Exemplo 6 é uma função $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ cujos $\alpha$-níveis $[x(t)]^\alpha = [x_I^\alpha, x_S^\alpha]$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Pelo Teorema 3 e lembrando que $[-\lambda x]^\alpha = [-\lambda x_S^\alpha, -\lambda x_I^\alpha]$, obtemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \frac{dx_I^\alpha}{dt} = -\lambda x_S^\alpha, & x_I^\alpha(t_0) = x_{I0}^\alpha, \\ \frac{dx_S^\alpha}{dt} = -\lambda x_I^\alpha, & x_S^\alpha(t_0) = x_{S0}^\alpha, \end{cases}$$

cuja solução é

$$x_I^\alpha = \frac{u_{0I}^\alpha - u_{0S}^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{u_{0I}^\alpha + u_{0S}^\alpha}{2} e^{-\lambda t},$$
$$x_S^\alpha = \frac{u_{0S}^\alpha - u_{0I}^\alpha}{2} e^{\lambda t} + \frac{u_{0I}^\alpha + u_{0S}^\alpha}{2} e^{-\lambda t},$$

em que $[x_0]^\alpha = [x_{0I}^\alpha, x_{0S}^\alpha]$.

# Desvantagem da Derivada de Hukuhara

Observe no Exemplo 6 que a o diâmetro do $\alpha$-nível (tamanho do intervalo) da solução $x(t)$ é dado por

$$\text{diam}([u(t)]^{\alpha}) = u_S^{\alpha}(t) - u_I^{\alpha}(t) = (u_{0S}^{\alpha} - u_{0I}^{\alpha})e^{\lambda t}, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

é crescente com $t$ se $u_{0I}^{\alpha} < u_{0S}^{\alpha}$, ou seja, se $u(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ não é um número real.

---

Essa é a maior crítica a essa abordagem. Com efeito, num problema de decaimento, espera-se que a solução seja próximo de zero quando $t$ é suficientemente grande. Consequentemente, a incerteza deve ser nula para $t$ grande. Isso não ocorre na solução obtida no exemplo anterior!

Atualmente, há muita pesquisa na área de "Análise *Fuzzy*" no sentido de definir derivadas que superam a desvantagem da derivada de Hukuhara.

---

Uma linha promissora considera aritmética de números *fuzzy* apropriadas para a definição de derivada (e integral). A aritmética de números *fuzzy* pode ser definida usando o conceito de interatividade.

---

Outra linha promissora consiste na aplicação da extensão de Zadeh diretamente ao operador de derivada!

# Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de derivada de Hukuhara e mostramos como esse conceito pode ser usado para formular a solução de um problema de valor inicial com parâmetros e/ou condições *fuzzy*.

---

Usando o Teorema 3, que caracteriza a derivada de Hukuhara, podemos escrever um problema de valor inicial fuzzy como um sistema de equações diferenciais (*crisp*) para cada um dos $\alpha$-níveis.

---

O teorema da representação de Ralescu-Negoita, apresentado na Aula 4, pode ser usado posteriormente para obter a solução $x(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ para $t > t_0$.

Muito grato pela atenção!