# Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

## Aula 19 – Medidas e Integrais *Fuzzy*.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

# Introdução

A noção de medida generaliza a noção de conceitos como comprimento, área, volume, etc.

---

Em probabilidade, a noção de medida é usada para avaliar a ocorrência de um evento.

---

Na aula de hoje, revisaremos a medida de probabilidade e apresentaremos as chamadas medidas *fuzzy* que, de certo modo, generalizam a medida de probabilidade.

---

O conteúdo da aula de hoje está baseado no Capítulo 7 do livro "Tópicos de Lógica *Fuzzy* e Biomatemática" de Barros e Bassanezi.

# $\sigma$-álgebra

Em probabilidade, identificamos um evento com um subconjunto de um espaço amostral $\Omega$ e atribuímos a ele um número que indica a chande dele ocorrer. Formalmente, os eventos devem satisfazer:

### Definição 1 ($\sigma$-álgebra)

Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\Omega$ é uma $\sigma$-álgebra se:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Se $A_k \in \mathcal{A}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

### Exemplo 2

O conjunto das partes de $\Omega$ é um exemplo de $\sigma$-álgebra.

# Medida de Probabilidade

Fixada uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ de $\Omega$, definimos uma medida de probabilidade em $\mathcal{A}$ da seguinte forma:

## Definição 3 (Medida de Probabilidade)

Uma função $P$ definida numa $\sigma$-álgebra é uma medida de probabilidade em $\mathcal{A}$ se

- $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Se $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k).$$

A propriedade 3 é chamada $\sigma$**-aditividade.**

## Teorema 4 (Continuidade da medida de probabilidade)

*Uma medida de probabilidade $P$ em uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ satisfaz:*

- *Se $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, satisfaz $A_i \subseteq A_j$ para todo $i < j$, então*

$$P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} P(A_k).$$

- *Se $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, satisfaz $A_j \subseteq A_i$ para todo $i < j$, então*

$$P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} P(A_k).$$

A $\sigma$-aditividade de uma medida de probabilidade $P$ é muito forte e pode não ser razoável em algumas situações.

## Exemplo 5

Suponha que desejamos medir a produtividade de um grupo de trabalhadores de uma determinada indústria. Seja $\mu(A)$ a produtividade de um grupo $A$ de trabalhadores. Nesse caso, não é razoável que $\mu$ seja necessariamente aditiva, ou seja, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ quando $A \cap B = \emptyset$. Pode ocorrer $\mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ se houver incompatibilidade entre os grupos de trabalhadores $A$ e $B$.

Em 1974, Sugeno introduziu uma classe de medidas que contempla o caso ilustrado no exemplo acima!

# Medida de Sugeno

## Definição 6 (Medida de Sugeno)

Seja $\mathcal{A}$ uma $\sigma$-álgebra. Uma função $\mu_S : \mathcal{A} \to [0,1]$ é uma medida de Sugeno em $\mathcal{A}$ se

- $\mu_S(\emptyset) = 0$ e $\mu_S(\Omega) = 1$.
- Se $A, B \in \mathcal{A}$, com $A \subseteq B$, então $\mu_S(A) \leq \mu_S(B)$.
- Se $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, satisfaz $A_i \subseteq A_j$ para todo $i < j$, então

$$\mu_S\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu_S(A_k).$$

- Se $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$, satisfaz $A_j \subseteq A_i$ para todo $i < j$, então

$$\mu_S\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu_S(A_k).$$

# Medidas *Fuzzy*

A medida de Sugeno é um caso particular das chamadas medidas *fuzzy*, em que excluí-se a continuidade.

**Definição 7 (Medida *Fuzzy*)**

Seja $\mathcal{A}$ uma $\sigma$-álgebra. Uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ é uma medida *fuzzy* em $\mathcal{A}$ se

- $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(\Omega) = 1$.
- Se $A, B \in \mathcal{A}$, com $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

## Exemplo 8

Sejam $\mathcal{A}$ uma $\sigma$-álgebra e $g_\lambda : \mathcal{A} \to [0, 1]$ uma função satisfazendo

1. $g_\lambda(\Omega) = 1$.
2. $g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B)$, com $\lambda > -1$ se $A \cap B = \emptyset$.

Mostre que $g_\lambda$ é uma medida *fuzzy*.

# Exemplo em Biomatemática

Consideremos uma alcateia com $n$ lobos, ou seja, $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A cada elemento $x_i$ de $\Omega$, atribuímos um número $p_i \in [0, 1]$ representando sua capacidade de predação. O valor $p_i$ pode estar associado à idade do lobo, por exemplo.

Podemos definir uma função $g_\lambda$ que mede a potencialidade de predação numa caçada de um grupo de lobos $A \subseteq \Omega$.

O potencial de caçada da alcateia ser máximo corresponde a dizer

$$g_\lambda(\Omega) = g_\lambda(\{x_1, \ldots, x_n\}) = 1.$$

Para dois grupos $A$ e $B$, com $A \cap B = \emptyset$, tomamos

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B), \quad \lambda > -1.$$

Assim, o potencial de predação é uma medida *fuzzy*.

Além disso, a potencialidade de predação descrita pela função $g_\lambda$ tem a seguinte interpretação dependendo do parâmetro $\lambda$:

- Se $\lambda \in (-1, 0)$, então os lobos cooperam pouco (capturam mas também espantam as presas).
- Se $\lambda = 0$, então os lobos cooperam moderadamente (não espantam as presas).
- Se $\lambda > 0$, então os lobos da alcateia cooperam fortemente (captam e fazem as presas correrem na direção de outros lobos).

# Medida de Possibilidade

Outro conceito muito utilizado na teoria *fuzzy* é o conceito de *possibilidade*.

## Definição 9 (Medida de Possibilidade)

Uma medida de possibilidade $\pi$ sobre $\Omega$ é uma função $\pi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ tal que

1. $\pi(\emptyset) = 0$ e $\pi(\Omega) = 1$.
2. Para qualquer família $\{A_i, i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos de $\Omega$, tem-se

$$\pi\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \sup\{\pi(A_i) : i \in \mathcal{I}\}.$$

Note que uma medida de possibilidade pode ser identificada com um subconjunto *fuzzy* das partes de $\Omega$.

# O Princípio de Consistência

Considere a frase:

*"Tal fato é possível mas improvável".*

Essa frase mostra que há uma diferença entre possibilidade e probabilidade. E mais, podemos assumir que a possibilidade, denotada por $\pi$, deve satisfazer a desigualdade

$$\pi(A) \geq P(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

chamada **princípio de consistência**.

---

O princípio de consistência estabelece uma relação entre possibilidade e probabilidade.

# Distribuição de Possibilidade

Tal como em probabilidade, tem-se a noção de distribuição de possibilidade:

**Definição 10 (Distribuição de possibilidade)**

Uma distribuição de possibilidade sobre um conjunto não-vazio $\Omega$ é uma função $\varphi : \Omega \to [0, 1]$ satisfazendo $\varphi(\omega) = 1$ para algum $\omega \in \Omega$.

Qualquer conjunto *fuzzy* normal de $\Omega$ define uma distribuição de possibilidade.

Por um lado, uma medida de possibilidade $\pi$ induz uma distribuição de possibilidade $\varphi_\pi$ sobre $\Omega$ definida da seguinte forma:

$$\varphi_\pi(\omega) = \pi(\{\omega\}), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

---

Por outro lado, dada uma função de distribuição de possibilidade $\varphi : \Omega \to [0, 1]$, podemos definir a medida de possibilidade $\pi$ sobre $\Omega$ através da equação

$$\pi(A) = \sup\{\varphi(\omega) : \omega \in A\}, \quad \forall A \subseteq \Omega.$$

Na teoria da probabilidade, tem-se o conceito de “valor esperado”, que é obtido usando uma integral da medida de probabilidade.

---

De um modo similar, usamos o conceito de integral *fuzzy* para definir o conceito de valor esperado de uma medida de possibilidade.

---

Antes de apresentar o conceito de integral *fuzzy*, revisaremos alguns conceitos clássicos. Não estaremos preocupados aqui com questões de existência!

# Integral de Lebesgue

Primeiramente, dizemos que uma função $g : \Omega \to [0, \infty)$ é uma função simples se

$$g(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}(\omega),$$

em que $A_i$, $1 \leq i \leq k$, é uma partição de $\Omega$ e $\chi_{A_i}$ é a função característica de $A_i$.

## Definição 11 (Integral de Lebesgue)

Seja $\mu$ uma medida $\sigma$-aditiva em $\Omega$. A integral de Lebesgue de uma função simples $g$ sobre $\Omega$ com respeito a $\mu$ é

$$\int_{\Omega} g d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i).$$

De um modo geral, pode-se mostrar que a integral de Lebesgue de uma função simples satisfaz

$$\int_\Omega g d\mu = \int_0^\infty \mu\{\omega \in \Omega : g(\omega) > \alpha\} d\alpha.$$

A integral de Lebesgue de uma função positiva $f : \Omega \to [0, \infty)$ é definida com base no fato que ela é limite de uma sequência de funções simples.

Dessa forma, tem-se:

$$\int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} d\alpha.$$

Em palavras, a integral de Lebesgue de $f$ pode ser obtida pela integral de Riemann da função que indica a medida dos "níveis" de $f$.

## Exemplo 12

Se $X : \Omega \to [0, \infty)$ é uma variável aleatória em $\Omega$ com medida de probabilidade $P$, então a esperança de $X$ é

$$E(X) = \int_\Omega X dP = \int_0^\infty P[X > x] dx,$$

em que $[X > x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\}$.

# Integral de Choquet

A integral de Choquet é definida sem exigir que $\mu$ seja $\sigma$-aditiva:

**Definição 13 (Integral de Choquet)**

A integral de Choquet de uma função $f : \Omega \to [0, \infty)$ em relação a uma medida $\mu$ (não necessariamente aditiva) é

$$(C) \int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} d\alpha.$$

Algumas propriedades, como a linearidade, não são válidas se $\mu$ não for aditiva!

# Integral de Sugeno

De um modo geral, a integral de Sugeno é obtida substituindo na integral de Lebesgue (ou Choquet) a soma pelo supremo e o produto pelo mínimo. Formalmente, tem-se:

## Definição 14 (Integral de Sugeno)

Sejam $f : \Omega \to [0, 1]$ uma função e $\mu$ uma medida *fuzzy* sobre $\Omega$. A integral de Sugeno de $f$ sobre $\Omega$ com respeito à $\mu$ é

$$(S) \int_{\Omega} f d\mu = \sup\{\alpha \wedge \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} : \alpha \in [0, 1]\}.$$

ou ainda,

$$(S) \int_{\Omega} f d\mu = \sup\{\alpha \wedge \mu\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \alpha\} : \alpha \in [0, 1]\}.$$

## Exemplo 15

Seja $F$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_F(x) = \max\{0, -4x^2 + 4x\}.$$

Determine o valor da integral de Sugeno

$$(S)\int_{\mathbb{R}} f dm,$$

em que $m$ denota a medida usual de Lebesgue.

## Exemplo 15

Seja $F$ um subconjunto de $\mathbb{R}$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_F(x) = \max\{0, -4x^2 + 4x\}.$$

Determine o valor da integral de Sugeno

$$(S)\int_{\mathbb{R}} fdm,$$

em que $m$ denota a medida usual de Lebesgue.

**Resposta:**

$$(S)\int_{\mathbb{R}} fdm = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tal como o valor esperado de uma variável aleatória com respeito à uma medida de probabilidade, define-se o valor esperado *fuzzy* usando a integral de Sugeno:

## Definição 16 (Esperança *Fuzzy*)

Sejam $X : \Omega \to [0, 1]$ uma variável incerta (tipicamente uma função de pertinência) e $\mu$ uma medida *fuzzy* em $\Omega$. A esperança *fuzzy* (ou valor esperado *fuzzy*) de $X$ é o número real

$$EF(X) = (S) \int_{\Omega} X d\mu = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} [\alpha \wedge \mu\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq \alpha\}].$$

Propriedades da esperança *fuzzy* e exemplos podem ser encontrados no livro de Barros e Bassanezi.

# Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos as medida de Sugeno, e de uma forma mais geral, as chamadas medidas *fuzzy* e as medidas de possibilidade.

Na aula de hoje, apresentamos também a chamada integral de Choquet e a integral de Sugeno.

Finalmente, apresentamos o conceito de esperança *fuzzy*.

Muito grato pela atenção!