Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 18 – Consistência e Continuidade de um Método de Inferência.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na aula anterior apresentaremos os chamados métodos de inferência disjuntivo e conjuntivo.

Vimos também que o método de inferência disjuntivo é consistente com uma base de regras se os conjuntos *fuzzy* dos antecedentes forem ortogonais.

Destacaremos hoje que, se o método disjuntivo é consistente, então o método conjuntivo também é consistente.

Apresentaremos também o conceito de continuidade de um método de inferência.

Terminaremos a aula demonstrando que um método de inferência disjuntivo é consistente se e somente se ele é contínuo.

Método de Inferência e Consistência

De um modo geral, um **método de inferência** define uma aplicação

$$\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y}),$$

que associa a cada $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ um conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$.

Dizemos que um método de inferência $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é **consistente** com uma base de regras *fuzzy*

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

se e somente se

$$\psi(A_i) = B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Regra Composicional de Inferência

No caso da **regra composicional de inferência** (RCI), definimos

$$\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A) = A \circ \mathcal{R},$$

em que $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ é uma relação *fuzzy* e "$\circ$" denota uma composição sup-$\mathcal{C}$.

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ um reticulado completo residuado.

- No **método de inferência de disjuntivo**, tem-se

$$\check{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} \big(A_i(\mathbf{x}) \vartriangle B_i(\mathbf{y}) \big).$$

- No **método de inferência conjuntivo**, define-se

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \big(A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y}) \big).$$

Otimalidade do Método de Inferência Conjuntivo

O método de inferência conjuntivo é ótimo no seguinte sentido:

Teorema 1

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ *um reticulado completo residuado. Considere uma base de regras fuzzy*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Se existe uma relação fuzzy $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ *tal que a regra composicional de inferência* $\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A) = A \circ \mathcal{R}$ *é consistente com a base de regras fuzzy, então o método de inferência conjuntivo é também consistente com a base de regras fuzzy, ou seja,*

$$\psi^{\circ}_{\hat{\mathcal{R}}}(A_i) \equiv A_i \circ \hat{\mathcal{R}} = B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Demonstração do Teorema 1

Na Aula 17, mostramos que a relação *fuzzy* $\hat{\mathcal{R}}$ satisfaz

$$A_i \circ \hat{\mathcal{R}} \subseteq B_i, \forall i = 1, \ldots, k,$$

e, para qualquer relação $\mathcal{R}$ tal que $A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$, tem-se

$$\mathcal{R} \subseteq \hat{\mathcal{R}}.$$

Agora, se existe $\mathcal{R}^*$ tal que $A_i \circ \mathcal{R}^* = B_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$, então $\mathcal{R}^* \subseteq \hat{\mathcal{R}}$. Pela monotonicidade da composição sup-$\mathcal{C}$, tem-se

$$B_i = A_i \circ \mathcal{R}^* \subseteq A_i \circ \hat{\mathcal{R}} \subseteq B_i \quad \Longrightarrow \quad A_i \circ \hat{\mathcal{R}} = B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Portanto, o método de inferência conjuntivo é também consistente com a base de regras *fuzzy*.

Consistência do Métodos Disjuntivo e Conjuntivo

Usando o conceito de reticulado completo residuado, tem-se:

Teorema 2

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow)$ *um reticulado completo residuado. Considere um sistema de regras fuzzy*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Se os conjuntos fuzzy $A_1, \ldots, A_k$ *são sup-*$\triangle$ *ortonormais, então:*

- *O método de inferência disjuntivo é consistente com a base de regras fuzzy, ou seja,* $\psi^{\circ}_{\check{\mathcal{R}}}(A) = A \circ \check{\mathcal{R}} \equiv A_\xi \circ \check{\mathcal{R}} = B_i, \forall \xi = 1, \ldots, k.$
- *O método de inferência conjuntivo é consistente com a base de regras fuzzy, ou seja,* $\psi^{\circ}_{\hat{\mathcal{R}}}(A) = A \circ \hat{\mathcal{R}} \equiv A_\xi \circ \check{\mathcal{R}} = B_i, \forall \xi = 1, \ldots, k.$

Demonstração do Teorema 2

A demonstração do primeiro item segue de um modo similar a demonstração do Teorema da Consistência do Método de Inferência Disjuntivo. Com efeito, se uma t-norma $\triangle$ forma uma adjunção com uma implicação $\rightarrow$, então ela comuta com o supremo em qualquer um dos seus argumentos.

O segundo item é um corolário do Teorema 1.

Continuidade de um Método de Inferência

Em muitas situações práticas, esperamos que o método de inferência $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ seja contínuo no sentido de fornecer B próximo de B_i se A é próximo de A_i. Simbolicamente, desejamos

$$A \approx A_i \quad \Longrightarrow \quad \psi(A) \approx B_i.$$

Definição 3 (Continuidade de Método de Inferência)

Sejam $\sigma_{\mathbf{X}}$ e $\sigma_{\mathbf{Y}}$ medidas de similaridades para conjuntos *fuzzy* em $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, respectivamente. Dizemos que um método de inferência $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é **contínuo** com respeito à uma base de regras

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

se, e somente se,

$$\sigma_{\mathbf{Y}}\big(\psi(A), B_i\big) \geq \sigma_{\mathbf{X}}(A, A_i), \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Continuidade Implica Consistência

A continuidade implica consistência se considerarmos uma medida de similaridade reflexiva $\sigma_{\mathbf{X}}$ e uma medida de similaridade forte $\sigma_{\mathbf{Y}}$.

Teorema 4

Sejam $\sigma_{\mathbf{X}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow [0,1]$ *uma medida de similaridade reflexiva e* $\sigma_{\mathbf{Y}} : \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \times \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \rightarrow [0,1]$ *uma medida de similaridade forte. Considere uma base de regras fuzzy*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

e um método de inferência $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$*. Se* ψ *é contínuo com respeito a base de regras, então* ψ *é também consistente.*

Com efeito, para todo $i = 1, \ldots, k$, tem-se:

$$\sigma_{\mathbf{Y}}\big(\psi(A_i), B_i\big) \geq \sigma_{\mathbf{X}}(A_i, A_i) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \psi(A_i) = B_i.$$

Medida de Similaridade Natural

A noção de continuidade de um método de inferência foi introduzida em 2006 por Perfilieva e Lehmke considerando a RCI e a seguinte classe de medidas de similaridade.

Definição 5 (Medida de Similaridade Natural)

Seja $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ um reticulado residuado. A medida de similaridade natural de $\mathcal{L}$ é $\sigma_{\mathcal{L}} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \times \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow [0,1]$ dada pela seguinte equação para conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathbf{X}$:

$$\sigma_{\mathcal{L}}(A,B) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \big[A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{x}) \big],$$

em que $a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Nessa disciplina, generalizamos a noção de continuidade considerando medidas de similaridade arbitrárias.

Teorema 6

A medida de similaridade $\sigma_{\mathcal{L}}$ natural de um reticulado residuado $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ é uma medida de similaridade forte.

Demonstração.

Da comutatividade do mínimo, temos

$$b \leftrightarrow a = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = a \leftrightarrow b.$$

Portanto, para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, tem-se:

$$\sigma_{\mathcal{L}}(B, A) = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \big[B(\mathbf{x}) \leftrightarrow A(\mathbf{x}) \big] = \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \big[A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{x}) \big] = \sigma_{\mathcal{L}}(A, B).$$

Além disso, note que

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad a \vartriangle 1 \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq a \rightarrow b \quad \Longleftrightarrow \quad a \rightarrow b = 1.$$

Demonstração.

Mostraremos agora que $\sigma_{\mathcal{L}}(A,B) = 1$ implica $A = B$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{L}}(A,B) = 1 \quad &\iff \quad \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{x}) = 1, \\
&\iff \quad A(\mathbf{x}) \leftrightarrow B(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \\
&\iff \quad (A(\mathbf{x}) \rightarrow B(\mathbf{x})) \wedge (B(\mathbf{x}) \rightarrow A(\mathbf{x})) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \\
&\iff \quad (A(\mathbf{x}) \rightarrow B(\mathbf{x})) = 1 \quad \text{e} \quad (B(\mathbf{x}) \rightarrow A(\mathbf{x})) = 1, \forall \mathbf{x}, \\
&\iff \quad A(\mathbf{x}) \leq B(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad B(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \\
&\iff \quad A(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \\
&\iff \quad A = B.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 7

Seja $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ *um reticulado residuado e defina*

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a), \quad \forall a, b \in [0,1].$$

Nesse caso, tem-se:

(a) $\leftrightarrow$ *é uma relação de equivalência* $\vartriangle$*-fuzzy. Em particular, tem-se*

$$(a \leftrightarrow b) \vartriangle (b \leftrightarrow c) \leq (a \leftrightarrow c), \quad \forall a, b, c \in [0,1].$$

(b) *Para todo* $a, b, c, d \in [0,1]$*, tem-se*

$$(a \leftrightarrow b) \vartriangle (c \leftrightarrow d) \leq (a \vartriangle c) \leftrightarrow (b \vartriangle d).$$

(c) *Dados* $a_i \in [0,1]$ *e* $b_i \in [0,1]$*, com* $i \in \mathcal{I}$*, tem-se*

$$\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} (a_i \leftrightarrow b_i) \leq \left[\left(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i \right) \leftrightarrow \left(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i \right) \right].$$

Continuidade e Consistência

Teorema 8 (Teorema da Equivalência de Perfilieva-Lehmke)

Seja $\mathcal{L} = ([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ um reticulado residuado e $\sigma_{\mathcal{L}}$ a medida de similaridade natural de $\mathcal{L}$. Dada uma base de regras fuzzy

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

e uma relação fuzzy $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$, a função $\psi_{\mathcal{R}}^{\circ} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ dada pela RCI, isto é,

$$\psi_{\mathcal{R}}^{\circ}(A) = A \circ \mathcal{R},$$

é contínua com se e somente se é consistente com a base de regras.

Demonstração do Teorema 8

Sabemos que continuidade implica consistência. Vamos mostrar que se $\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}$ é consistente, então é contínuo. Com efeito,

$$\sigma_{\mathbf{Y}}\left(\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A), B_i\right) = \sigma_{\mathbf{Y}}\left(\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A), \psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A_i)\right) = \bigwedge_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \left(\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A)(\mathbf{y}) \leftrightarrow \psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A_i)(\mathbf{y})\right).$$

Mas, para qualquer $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A)(\mathbf{y}) \leftrightarrow \psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A_i)(\mathbf{y}) \\
&= \left[\bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} A(\mathbf{x}) \vartriangle \mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right] \leftrightarrow \left[\bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} A_i(\mathbf{x}) \vartriangle \mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right] \\
&\geq \bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} [A(\mathbf{x}) \vartriangle \mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})] \leftrightarrow [A_i(\mathbf{x}) \vartriangle \mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})] \\
&\geq \bigwedge_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} [A(\mathbf{x}) \leftrightarrow A_i(\mathbf{x})] \vartriangle [\mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leftrightarrow \mathcal{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})] = \sigma_{\mathbf{X}}(A, A_i).
\end{aligned}$$

Logo, $\sigma_{\mathbf{Y}}\left(\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A), B_i\right) \geq \sigma_{\mathbf{X}}\left(A, A_i\right)$ e, portanto, $\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}$ é contínuo.

Considerações Finais

Lembre-se que o método de inferência de Mamdani, que corresponde à um método de inferência disjuntivo, forneceu excelentes resultados no problema *backing-up a truck* embora $\psi^{\circ}_{\check{\mathcal{R}}}$ desse problema não seja contínua nem consistente!

Portanto, tal como a consistência, a continuidade de um método de inferência não é necessária (e nem suficiente) para o bom desempenho do sistema baseado em regras *fuzzy* em uma aplicação prática.

Contudo, esse tema ainda é recente e requer estudos e pesquisa!

Muito grato pela atenção!