Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 17 – Método de Inferência Conjuntivo e Reticulados Completos Residuados.

Marcos Eduardo Valle

Na aula anterior, apresentamos o método de inferência disjuntivo, que inclui o método de inferência de Mamdani como exemplo.

Na aula anterior, também apresentamos a regra composicional de inferência e demonstramos que um método de inferência disjuntivo é consistente se os conjuntos *fuzzy* dos antecedentes são ortonormais.

Na aula de hoje, usando a regra composicional de inferência, apresentaremos os chamados métodos de inferência disjuntivos.

Em termos gerais, um método de inferência disjuntivo é obtido determinando a maior relação *fuzzy* que satisfaz uma versão mais fraca do conceito de consistência de uma base de regras.

Exemplo Simples

Considere a seguinte base de regras *fuzzy*:

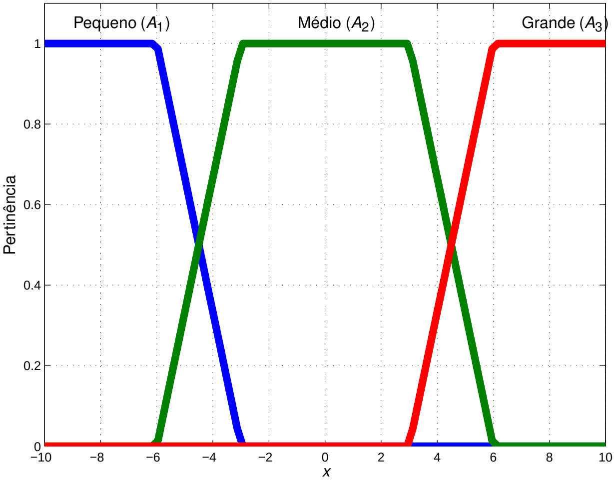
SE x é pequeno **ENTÃO** y é pequeno,

SE x é médio **ENTÃO** y é médio,

SE x é grande **ENTÃO** y é grande,

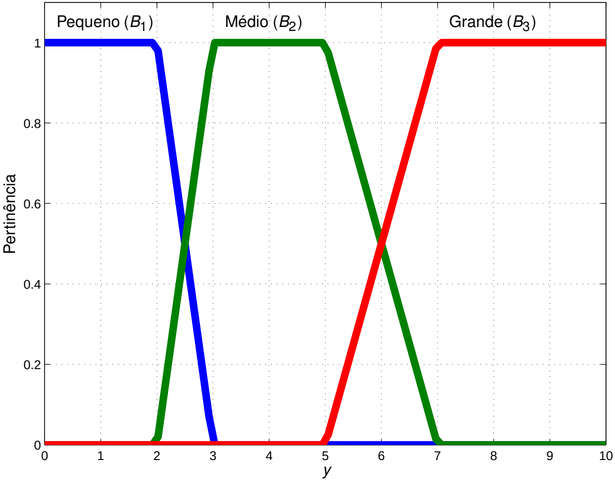
em que os conceitos “pequeno”, “médio” e “grande” são descritos pelos seguintes conjuntos *fuzzy* para cada uma das variáveis $x \in X = [-10, 10]$ e $y \in Y = [0, 10]$:

Funções de pertinência para a variável x:



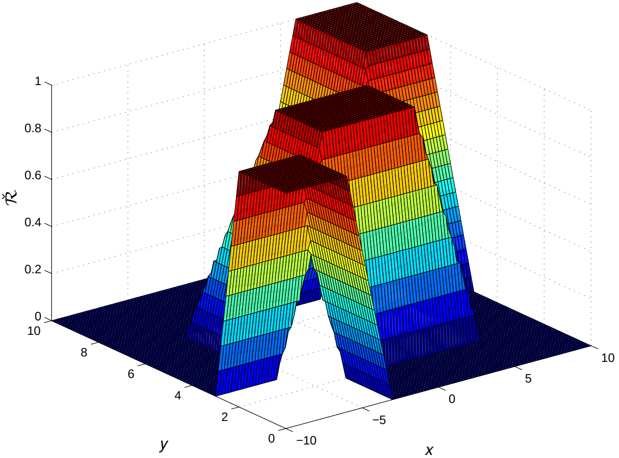
Os conjuntos *fuzzy* A_1, A_2 e A_3 não são sup-min ortonormais!

Funções de pertinência para a variável y:



No método de inferência de Mamdani, definimos a relação

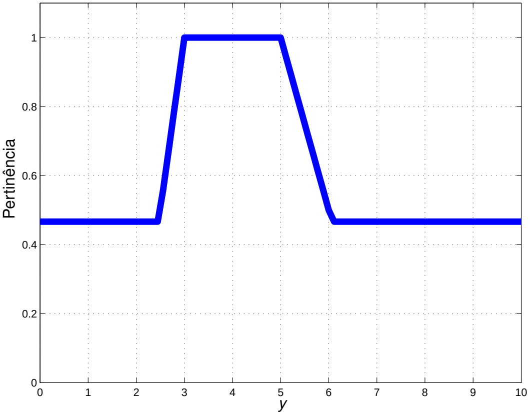
$$\check{\mathcal{R}}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{3} A_i(x) \wedge B_i(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$



Posteriormente, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(X)$, obtemos o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(Y)$ da seguinte forma:

$$B = A \circ \check{\mathcal{R}}.$$

Por exemplo, ao apresentar $A = A_2$, encontramos $B = A_2 \circ \check{\mathcal{R}}$



O método de inferência não é consistente!

Formulação do Problema

De um modo geral, dada uma base de regras

$$\textbf{SE x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

na regra composicional de inferência (RCI) buscamos uma relação $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ que seja consistente, ou seja, queremos

$$B_i = A_i \circ \mathcal{R}, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Contudo, não podemos garantir que existe uma relação $\mathcal{R}$ que satisfaz esse sistema de equações!

Vamos considerar então um problema mais geral e que sempre possui pelo menos uma solução.

Dada uma base de regras

$$\textbf{SE x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

buscamos uma $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ que satisfaz

$$A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

em que $\circ$ denota a composição sup-$\mathcal{C}$.

Note que (1) admite a solução trivial

$$\mathcal{R}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}.$$

Com efeito, pela monotonicidade, qualquer conjunção *fuzzy* satisfaz $\mathcal{C}(x, 0) \leq \mathcal{C}(1, 0) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Logo, para qualquer i, tem-se

$$(A_i \circ 0)(\mathbf{y}) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathcal{C}(A_i, 0) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} 0 = 0 \leq B_i(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}.$$

A solução trivial, porém, não é útil em situações práticas. Assim, buscamos a *maior relação* que é consiste com a base de regras.

Problema da Regra Composicional de Inferência

Dada uma base de regras

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

determine a relação $\hat{\mathcal{R}}$ através da equação:

$$\hat{\mathcal{R}} = \bigvee \{\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) : \mathcal{R} \circ A_i \subseteq B_i, \forall i = 1, \ldots, k\}, \tag{2}$$

em que $\circ$ denota a composição sup-$\mathcal{C}$.

Sendo $\mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ um reticulado completo, a relação $\hat{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ dada por (2) existe e é única.

Apresentaremos conceitos necessários para determinar a relação $\hat{\mathcal{R}}$ definida por (2) consistente com a base de regras.

Resíduo de uma Conjunção *Fuzzy*

Definição 1 (Resíduo de uma Conjunção *Fuzzy*)

Dada uma conjunção *fuzzy* $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, o operador $I_{\mathcal{C}} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ dado por

$$I_{\mathcal{C}}(a,b) = \bigvee \{z \in [0,1] : \mathcal{C}(a,z) \leq b\}, \quad \forall a,b \in [0,1],$$

é chamado **resíduo** da conjunção *fuzzy* $\mathcal{C}$.

Implicação Residual

Teorema 2 (Implicação Residual ou R-implicação)

Seja $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *uma conjunção fuzzy tal que* $\mathcal{C}(1,z) = 0$ *se e somente se* $z = 0$. *Nesse caso, o resíduo da conjunção fuzzy é uma implicação fuzzy, denotada por* $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$*, chamada implicação residual ou R-implicação associada a conjunção fuzzy* $\mathcal{C}$.

Notação:

A implicação residual $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ também pode ser denodada da seguinte forma: $a \to_{\mathcal{C}} b = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a,b)$, para todo $a, b \in [0,1]$.

Corolário 3

O resíduo de uma t-norma $\triangle$ *é uma implicação residual* $\mathcal{I}_{\triangle}$.

Demonstração do Teorema 2

Primeiro, vamos mostrar que a implicação $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ satisfaz coincide com a implicação clássica $\{0,1\} \times \{0,1\}$. Com efeito,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(0,0) = \bigvee\{z \in [0,1] : \mathcal{C}(0,z) \leq 0\} = 1,$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(0,1) = \bigvee\{z \in [0,1] : \mathcal{C}(0,z) \leq 1\} = 1,$$
$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(1,1) = \bigvee\{z \in [0,1] : \mathcal{C}(1,z) \leq 1\} = 1.$$

Além disso, como $\mathcal{C}(1,z) = 0$ se e somente se $z = 0$, tem-se

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(1,0) = \bigvee\{z \in [0,1] : \mathcal{C}(1,z) \leq 0\} = 0.$$

Vamos mostrar agora que $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ é decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo. Da monotonicidade da conjunção *fuzzy*, tem-se

$$a \leq c \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}(a,z) \leq \mathcal{C}(c,z), \quad \forall z \in [0,1].$$

Equivalentemente,

$$\mathcal{C}(c,z) \leq b \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}(a,z) \leq b.$$

e, portanto,

$$\{z \in [0,1] : \mathcal{C}(c,z) \leq b\} \subseteq \{z \in [0,1] : \mathcal{C}(a,z) \leq b\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(c,b) &= \bigvee \{z \in [0,1] : \mathcal{C}(c,z) \leq b\} \\ &\leq \bigvee \{z \in [0,1] : \mathcal{C}(a,z) \leq b\} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a,b). \end{aligned}$$

De um modo similar, pode-se mostrar que $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a,b) \leq \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a,c)$ sempre que $b \leq c$.

Exemplo 4

Determine a implicação residual de $a \vartriangle_M b = \min\{a, b\}$.

Exemplo 4

Determine a implicação residual de $a \triangle_M b = \min\{a, b\}$.

Resposta: A implicação residual do mínimo é

$$\mathcal{I}_M(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A implicação $\mathcal{I}_M$ é chamada **implicação de Gödel.**

Exemplo 5

Determine a implicação residual de $a \triangle_P b = ab$.

Exemplo 5

Determine a implicação residual de $a \triangle_P b = ab$.

Resposta: A implicação residual do produto é

$$\mathcal{I}_P(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b/a, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A implicação $\mathcal{I}_P$ é chamada **implicação de Goguen.**

Exemplo 6

Determine a implicação residual de $a \triangle_L b = \max\{0, a + b - 1\}$.

Exemplo 6

Determine a implicação residual de $a \triangle_L b = \max\{0, a+b-1\}$.

Resposta: A implicação residual de Lukasiewicz é

$$\mathcal{I}_L(a,b) = \min\{1, 1-a+b\}.$$

Exemplo 7

Determine a implicação residual da t-norma drástica

$$a \triangle_D b = \begin{cases} b, & a = 1, \\ a, & b = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 7

Determine a implicação residual da t-norma drástica

$$a \vartriangle_D b = \begin{cases} b, & a = 1, \\ a, & b = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resposta: A implicação residual da t-norma drástica é a implicação *fuzzy*

$$\mathcal{I}_D(a, b) = \begin{cases} b, & a = 1, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Infelizmente essa implicação não tem propriedades interessantes!

Adjunção

Definição 8 (Adjunção)

Considere uma conjunção *fuzzy* $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ e uma implicação *fuzzy* $\mathcal{I} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. Dizemos que o par $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ forma uma adjunção se e somente se

$$\mathcal{C}(a,x) \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \mathcal{I}(a,b),$$

para $a, b, x \in [0,1]$.

Observação:

Numa adjunção $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$, a implicação *fuzzy* $\mathcal{I}$ faz o papel da “inversa” da conjunção *fuzzy* $\mathcal{C}$.

Teorema 9

Se $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$ forma uma adjunção, então $\mathcal{I}$ é a implicação residual de $\mathcal{C}$, ou seja,

$$\mathcal{I}(a,b) = \bigvee\{z \in [0,1] : \mathcal{C}(a,z) \leq b\}, \quad \forall a,b \in [0,1].$$

Demonstração.

Com efeito,

$$\mathcal{I}(a,b) = \bigvee\{z \in [0,1] : z \leq \mathcal{I}(a,b)\} = \bigvee\{z \in [0,1] : \mathcal{C}(a,z) \leq b\}.$$

$\square$

Numa adjunção, temos a implicação residual $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ de uma conjunção *fuzzy* $\mathcal{C}$.

Porém, nem toda implicação residual $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ forma uma adjunção com $\mathcal{C}$.

Exemplo 10

Mostre que $\triangle_D$ e $\mathcal{I}_D$ não formam uma adjunção.

Numa adjunção, temos a implicação residual $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ de uma conjunção *fuzzy* $\mathcal{C}$.

Porém, nem toda implicação residual $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ forma uma adjunção com $\mathcal{C}$.

Exemplo 10

Mostre que $\triangle_D$ e $\mathcal{I}_D$ não formam uma adjunção.

Resposta: Basta tomar $a = 0.5$, $b = 0.3$ e $x = 1$. Nesse caso,

$$\mathcal{I}_D(a, b) = \mathcal{I}_D(0.5, 0.3) = 1 \geq 1,$$

porém

$$a \triangle_D x = 0.5 \triangle_D 1 = 0.5 \not\leq 0.3.$$

Logo,

$$x \leq \mathcal{I}_D(a, b) \not\Rightarrow a \triangle x \leq b.$$

Reticulado Completo Residuado

A estrutura algébrica obtida equipando o intervalo $[0,1]$ com uma t-norma $\triangle$ e uma implicação *fuzzy* $\rightarrow$ é chamado reticulado completo residuado se $(\triangle, \rightarrow)$ forma uma adjunção.

Definição 11 (Reticulado Completo Residuados)

A estrutura algébrica $\langle [0,1], \vee, \wedge, \triangle, \rightarrow, 0, 1 \rangle$ é um reticulado completo residuado se o par $(\triangle, \rightarrow)$, em que $\triangle$ é uma t-norma e $\rightarrow$ é uma implicação *fuzzy*, forma uma adjunção.

Exemplo 12

Exemplos de reticulados completos residuados:

- $\langle [0,1], \vee, \wedge, \triangle_L, \rightarrow_L, 0, 1 \rangle$.
- $\langle [0,1], \vee, \wedge, \triangle_M, \rightarrow_M, 0, 1 \rangle$.
- $\langle [0,1], \vee, \wedge, \triangle_P, \rightarrow_P, 0, 1 \rangle$.

Teorema 13

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ *um reticulado completo residuado. Para quaisquer* $x, y \in [0,1]$*, tem-se:*

$$x \vartriangle (x \rightarrow y) \leq y.$$

Demonstração.

Com efeito, da relação de adjunção, tem-se

$$x \vartriangle (x \rightarrow y) \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad (x \rightarrow y) \leq (x \rightarrow y),$$

que é verdadeira para quaisquer $x, y \in [0,1]$. □

Solução da Regra Composicional de Inferência

Teorema 14 (Solução da Regra Composicional de Inferência)

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ *um reticulado completo residuado e considere uma base de regras*

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

A relação $\hat{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ *dada por*

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left(A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y})\right),$$

satisfaz

$$\hat{\mathcal{R}} = \bigvee \{\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) : A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i, \forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Demonstração do Teorema 14

Para qualquer relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$, tem-se

$$
\begin{aligned}
& A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k \\
\iff & \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} A_i(\mathbf{x}) \vartriangle \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq B_i(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, \forall i = 1, \ldots, k \\
\iff & A_i(\mathbf{x}) \vartriangle \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq B_i(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, \forall i = 1, \ldots, k \\
\iff & \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \big(A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y})\big), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, \forall i = 1, \ldots, k \\
\iff & \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \bigwedge_{i=1}^{k} \big(A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y})\big), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}, \\
\iff & \mathcal{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\hat{\mathcal{R}}$ é maior ou igual a qualquer relação que satisfaz a condição $A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i$, para $i = 1, \ldots, k$.

Finalmente, vamos mostrar que $A_j \circ \hat{\mathcal{R}} \subseteq B_j$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Com efeito, para quaisquer $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ e $j \in \{1, \ldots, k\}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
(A_j \circ \hat{\mathcal{R}})(\mathbf{y}) &= \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left(A_j(\mathbf{x}) \vartriangle \hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) \\
&= \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left(A_j(\mathbf{x}) \vartriangle \left[\bigwedge_{i=1}^{k} \left(A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y})\right)\right]\right) \\
&\leq \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left(A_j(\mathbf{x}) \vartriangle \left(A_j(\mathbf{x}) \rightarrow B_j(\mathbf{y})\right)\right) \\
&\overbrace{\leq}^{Teo. 13} \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} B_j(\mathbf{y}) = B_j(\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Método de Inferência Conjuntivo

Seja $([0,1], \vee, \wedge, \vartriangle, \rightarrow)$ um reticulado completo residuado e considere uma base de regras

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

No **método de inferência conjuntivo**, define-se a relação *fuzzy*

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} A_i(\mathbf{x}) \rightarrow B_i(\mathbf{y}).$$

O método é chamado conjuntivo porque a relação é obtida usando o mínimo, que é uma conjunção!

Posteriormente, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é determinado através da RCI, ou seja,

$$B = A \circ \hat{\mathcal{R}}.$$

Exemplo Simples

Considere novamente a base de regras *fuzzy*:

SE x é pequeno **ENTÃO** y é pequeno,

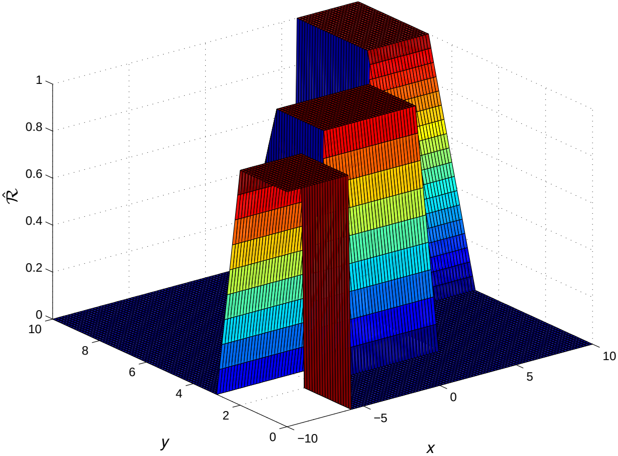
SE x é médio **ENTÃO** y é médio,

SE x é grande **ENTÃO** y é grande,

em que os conceitos “pequeno”, “médio” e “grande” são descritos pelos conjuntos *fuzzy* apresentados anteriormente.

Considerando o reticulado residuado $([0,1], \vee, \wedge, \triangle_M, \rightarrow_M)$, em que $\triangle_M = \wedge$ e $\rightarrow_M$ é a implicação de Gödel, encontramos

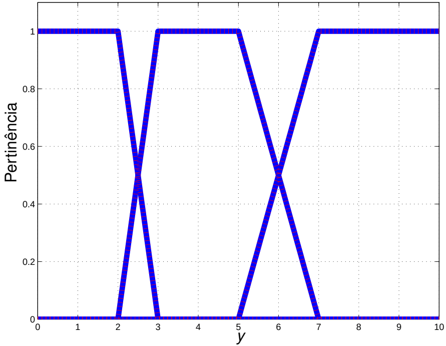
$$\hat{\mathcal{R}}(x,y) = \bigwedge_{i=1}^{3} A_i(x) \rightarrow_M B_i(y), \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$



Posteriormente, dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(X)$, obtemos o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(Y)$ da seguinte forma:

$$B = A \circ \hat{\mathcal{R}}.$$

Por exemplo, ao apresentar $A = A_\xi$, encontramos $\hat{B}_\xi = A_\xi \circ \mathcal{R}$



que são exatamente iguais a B_ξ. Logo, esse método de inferência é consistente!

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o conceito de reticulado completo residuado; uma estrutura algébrica obtida equipando $[0,1]$ com uma t-norma e uma implicação *fuzzy* que formam uma adjunção.

Dado uma base de regras

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

usando a estrutura de reticulado completo, mostramos que

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigwedge_{\xi=1}^{k} \left(A_i(\mathbf{x}) \to B_i(\mathbf{y}) \right),$$

é a maior relação *fuzzy* que satisfaz $A_i \circ \mathcal{R} \subseteq B_i, \forall i = 1, \ldots, k$.
A relação acima é usada no método de inferência conjuntivo!

Muito grato pela atenção!