Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 16 – Regra Composicional de Inferência e Consistência de um Método de Inferência.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Nas Aulas 6 e 7, apresentamos exemplos de sistemas baseados em regras *fuzzy* usando o método de inferência de Mamdani.

Lembre-se que um sistema baseado em regras *fuzzy* contém as seguintes componentes:

- **Dicionário**, que define conjuntos *fuzzy* sobre as variáveis.
- **Base de regras**, que estabelece uma relação entre as variáveis.
- **Método de inferência**, usado para determinar a saída dado uma certa entrada.
- Eventualmente, tem-se também um processo de **defuzzificação** que associa um conjunto *fuzzy* à um número real.

Na aula de hoje, generalizaremos o método de inferência de Mamdani. Sobretudo, estabeleceremos uma conexão do método de inferência com as composições conjunto-relação *fuzzy*.

Escrevendo uma Base de Regras *Fuzzy*

Suponha que as variáveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estão definidas em universos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ e as variáveis dependentes $y_1, y_2, \ldots, y_m$ estão definidas em $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

De um modo geral, a i-ésima regra de uma base com k regras *fuzzy* pode ser escrita da seguinte forma:

$$\textbf{SE } x_1 \text{ é } A_{i1} \textbf{ e } x_2 \text{ é } A_{i2} \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } x_n \text{ é } A_{in},$$
$$\textbf{ENTÃO } y_1 \text{ é } B_{i1} \textbf{ e } y_2 \text{ é } B_{i2} \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } y_m \text{ é } B_{im}.$$

Note que o antecedente

$$x_1 \text{ é } A_{i1} \textbf{ e } x_2 \text{ é } A_{i2} \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } x_n \text{ é } A_{in},$$

pode ser escrito como

$$\mathbf{x} \text{ é } A_i,$$

em que

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n,$$

e

$$A = A_{i1} \times A_{i2} \times \ldots \times A_{in} \in \mathcal{F}(\mathbf{X}),$$

é dado pelo produto cartesiano dos conjunto *fuzzy* no antecedente.

De um modo similar, podemos escrever os consequentes como

$$\mathbf{y} \text{ é } B_i,$$

em que

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{Y} = Y_1 \times \cdots \times Y_m,$$

$$B_i = B_{i1} \times B_{i2} \times \ldots \times B_{im} \in \mathcal{F}(\mathbf{Y}).$$

Concluindo, um sistema com k regras *fuzzy* pode ser escrito como

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Nas aulas anteriores, vimos que o método de inferência de Mamdani fornece um conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ após a apresentação de uma entrada $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

Veremos que o método de Mamdani pode ser generalizado para fornecer um conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ após a apresentação de um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$.

Para tanto, vamos revisar o método de inferência de Mamdani.

Método de Inferência de Mamdani

Considere uma base de regras *fuzzy* da forma

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Dado $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbf{X}$, no método de inferência de Mamdani, primeiro calculamos as ativações

$$w_i = A_i(\mathbf{x}_0) = \bigwedge_{j=1}^{n} A_{ij}(x_{0j}), \quad \forall i = 1, \ldots, k$$

Observe que, no método de inferência de Mamdani, o produto cartesiano $A_i = A_{i1} \times \ldots \times A_{in}$ é determinado usando o mínimo!

Posteriormente, determina-se $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ através da equação

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} (w_i \wedge B_i),$$

em que a união é determinada usando o máximo, ou seja,

$$B(\mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} \big(w_i \wedge B_i(\mathbf{y})\big), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}.$$

Vamos estender o método de inferência de Mamdani para deduzir um conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ a partir de um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ como entrada no lugar de $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

Primeiramente, observe que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ pode ser descrito pela função característica $\chi_0 : \mathbf{X} \to \{0, 1\}$ dada por

$$\chi_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dessa forma, a ativação da *i*-ésima regra é

$$w_i = A_i(\mathbf{x}_0) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[\chi_0(\mathbf{x}) \wedge A_i(\mathbf{x}) \right].$$

Podemos agora considerar o caso mais geral em que observamos $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ no lugar de $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$. Com efeito, a ativação da *i*-ésima regra será

$$w_i = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[A(\mathbf{x}) \wedge A_i(\mathbf{x}) \right].$$

Resumo do Método de Inferência de Mamdani

Concluindo, considere uma base de regras *fuzzy*

$$\textbf{SE x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, o método de inferência de Mamdani fornece o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ dado por

$$B(\mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} \left[w_i \wedge B_i(\mathbf{y}) \right], \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y},$$

em que

$$w_i = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[A(\mathbf{x}) \wedge A_i(\mathbf{x}) \right], \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Outros métodos de inferência podem ser obtidos substituindo o mínimo por uma outra t-norma!

Método de Inferência Disjuntivo

Considere uma base de regras *fuzzy*

$$\textbf{SE x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, determinamos $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ como

$$B(\mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} \left[w_i \vartriangle B_i(\mathbf{y}) \right], \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y},$$

em que

$$w_i = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[A(\mathbf{x}) \vartriangle A_i(\mathbf{x}) \right], \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Esse método é referido **método de inferência disjuntivo** porque B é obtido pela união (disjunção) dos B_i's.

Medida de Possibilidade

A ativação de uma regra no método de inferência disjuntivo pode ser interpretado em termos de uma medida de possibilidade:

Definição 1 (Medida de Possibilidade)

A possibilidade sup-$\triangle$ de $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ dado um conjunto *fuzzy* $A_i \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, denotada por $\text{Poss}(A, A_i)$, é definida pela equação

$$\text{Poss}(A, A_i) = \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \big(A(\mathbf{x}) \triangle A_i(\mathbf{x})\big).$$

Em palavras, $\text{Poss}(A, A_i)$ é supremo da intersecção de A e A_i.

Note que

- $\text{Poss}(A, A_i) = 0$ se $\text{Supp}(A) \cap \text{Supp}(A_i) = \emptyset$.
- $\text{Poss}(A, A_i) = 1$ se existe $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tal que $A(\mathbf{x}) = A_i(\mathbf{x}) = 1$.

Em termos da medida de possibilidade, o método de inferência disjuntivo pode ser escrito como:

Dadas um conjunto com k as regras *fuzzy*

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

e um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, determinamos $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ como

$$B(y) = \bigvee_{i=1}^{k} \big[\text{Poss}(A, A_i) \vartriangle B_i(\mathbf{y})\big], \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}.$$

Regra Composicional de Inferência Sup-$\mathcal{C}$

O método de inferência disjuntivo da página anterior pode ser reformulado em termos da composição sup-$\mathcal{C}$.

Especificamente, considere a seguinte definição:

Definição 2 (Regra Composicional de Inferência – RCI)

Dada uma relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$, a **regra composicional de inferência** define o conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ através da seguinte equação para qualquer conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$:

$$B = A \circ \mathcal{R},$$

em que $\circ$ denota a composição sup-$\mathcal{C}$.

Na prática, geralmente consideramos uma t-norma como conjunção *fuzzy* na composição sup-$\mathcal{C}$.

Teorema 3 (Método de Inferência Disjuntivo e a RCI)

Seja $\triangle$ uma t-norma contínua. Considere um sistema de regras fuzzy

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

em que $A_i \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ e $B_i \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ para todo $i = 1, \ldots, k$.
Dado um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$, o conjunto fuzzy

$$B(\mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} \left[Poss(A, A_i) \triangle B_i(\mathbf{y}) \right],$$

fornecido pelo método de inferência disjuntivo satisfaz $B = A \circ \check{\mathcal{R}}$, em que $\check{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ é a relação dada por

$$\check{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} \left(A_i(\mathbf{x}) \triangle B_i(\mathbf{y}) \right).$$

Demonstração.

Com efeito, para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
B(\mathbf{y}) &= \bigvee_{i=1}^{k} \left\{ \left[\bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left[A(\mathbf{x}) \vartriangle A_i(\mathbf{x}) \right] \right] \vartriangle B_i(\mathbf{y}) \right\} \\
&= \bigvee_{i=1}^{k} \left\{ \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left[A(\mathbf{x}) \vartriangle A_i(\mathbf{x}) \vartriangle B_i(\mathbf{y}) \right] \right\} \\
&= \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left\{ \bigvee_{i=1}^{k} \left[A(\mathbf{x}) \vartriangle A_i(\mathbf{x}) \vartriangle B_i(\mathbf{y}) \right] \right\} \\
&= \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left\{ A(\mathbf{x}) \vartriangle \left[\bigvee_{i=1}^{k} \left[A_i(\mathbf{x}) \vartriangle B_i(\mathbf{y}) \right] \right] \right\} \\
&= \bigvee_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left\{ A(\mathbf{x}) \vartriangle \check{\mathcal{R}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \right\} = (A \circ \check{\mathcal{R}})(\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Consistência de um Método de Inferência

De um modo geral, um método de inferência define uma função $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ que associa a cada $A \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ um conjunto *fuzzy* $B \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$.

Definição 4 (Consistência de um Método de Inferência)

Dizemos que uma função $\psi : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ é consistente com uma base de regras *fuzzy*

$$\textbf{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \textbf{ ENTÃO } \mathbf{y} \text{ é } B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

se $\psi(A_i) = B_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Em outras palavras, ψ é consistente com a base de regras se e somente se ψ interpola os pares (A_i, B_i), para todo $i = 1, \ldots, k$.

Consistência da Regra Composicional de Inferência

No caso da regra composicional de inferência, temos

$$\psi^{\circ}_{\mathcal{R}}(A) = A \circ \mathcal{R},$$

em que $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ e "$\circ$" denota uma composição sup-$\mathcal{C}$.

Tal como no método de inferência de disjuntivo, suponha que $\check{\mathcal{R}}$ é determinada da seguinte forma:

$$\check{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} \big(A_i(\mathbf{x}) \bigtriangleup B_i(\mathbf{y})\big),$$

em que $\bigtriangleup$ denota uma t-norma contínua.

Que condições devemos impor sobre os conjuntos *fuzzy* A_i dos antecedentes para que $\psi^{\circ}_{\check{\mathcal{R}}}$ seja consistente?

Conjuntos *Fuzzy* Ortonormais

Definição 5 (Conjuntos *Fuzzy* Sup-$\triangle$ Ortonormais)

Seja $\triangle$ uma t-norma. Dizemos que os conjuntos *fuzzy* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são sup-$\triangle$ ortonormais se

$$\bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} A_i(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

e

$$\bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left[A_i(\mathbf{x}) \triangle A_j(\mathbf{x}) \right] = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Em outras palavras, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são sup-$\triangle$ ortonormais se e somente se

$$\mathrm{Poss}(A_i, A_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema 6

Considere conjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *normais, ou seja,* $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} A_i(\mathbf{x}) = 1$ *para todo* $i = 1, \ldots, k$*. Temos que:*

1. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *são sup-min ortonormais se e somente se*
$$Supp(A_i) \cap Supp(A_j) = \emptyset, \quad \forall i \neq j.$$
2. $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *são sup-*$\triangle_L$ *ortonormais se e somente se*
$$A_i(\mathbf{x}) + A_j(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad e \quad \forall i \neq j.$$

Demonstração

Devemos apenas considerar a equação $A_i \circ A_j = 0$ para $i \neq j$, i.e.,

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} A_i(\mathbf{x}) \vartriangle A_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \iff \quad A_i(\mathbf{x}) \vartriangle A_j(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

1. Considerando a composição sup-min, temos $A_i(\mathbf{x}) \wedge A_j(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, que corresponde a afirmar que não existe $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tal que $A_i(\mathbf{x}) > 0$ e $A_j(\mathbf{x}) > 0$. Equivalentemente, $\text{Supp}(A_i) \cap \text{Supp}(A_j) = \emptyset$.
2. Considerando a composição sup-$\vartriangle_L$, encontramos

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}) \vartriangle_L A_j(\mathbf{x}) = 0 \quad &\iff \quad 0 \vee (A_i(\mathbf{x}) + A_j(\mathbf{x}) - 1) = 0 \\ &\iff \quad A_i(\mathbf{x}) + A_j(\mathbf{x}) - 1 \leq 0 \\ &\iff \quad A_i(\mathbf{x}) + A_j(\mathbf{x}) \leq 1. \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Consistência do Método de Inferência Disjuntivo

Teorema 7

Considere um sistema de regras fuzzy

$$\textbf{\textit{SE}}\ \mathbf{x}\ \textit{é}\ A_i\ \textbf{\textit{ENTÃO}}\ \mathbf{y}\ \textit{é}\ B_i, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

em que $A_i \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ *e* $B_i \in \mathcal{F}(\mathbf{Y})$ *para todo* $i = 1, \ldots, k$ *e defina a relação* $\check{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ *através da equação*

$$\check{\mathcal{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigvee_{i=1}^{k} A_i(\mathbf{x}) \bigtriangleup B_i(\mathbf{y}),$$

em que $\bigtriangleup$ *denota uma t-norma contínua. Se os conjuntos fuzzy* $A_1, \ldots, A_k$ *são sup-*$\bigtriangleup$ *ortonormais, então*

$$B_\xi = A_\xi \circ \check{\mathcal{R}}, \quad \forall \xi = 1, \ldots, k$$

Demonstração

Com efeito, se $A_1, \ldots, A_k$ são sup-$\vartriangle$ ortonormais, então

$$\mathrm{Poss}(A_\xi, A_i) = \begin{cases} 1, & \xi = i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, tem-se

$$\begin{aligned}
(A_\xi \circ \mathcal{R})(\mathbf{y}) &= \bigvee_{i=1}^{k} \left[\mathrm{Poss}(A_\xi, A_i) \vartriangle B_i(\mathbf{y})\right] \\
&= \left[\mathrm{Poss}(A_\xi, A_\xi) \vartriangle B_\xi(\mathbf{y})\right] \vee \left\{ \bigvee_{i \neq \xi} \left[\mathrm{Poss}(A_\xi, A_i) \vartriangle B_i(\mathbf{y})\right] \right\} \\
&= \left[1 \vartriangle B_\xi(\mathbf{y})\right] \vee \left\{ \bigvee_{i \neq \xi} \left[0 \vartriangle B_i(\mathbf{y})\right] \right\} = B_\xi(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Considerações Finais

Na aula de hoje, revisamos o método de inferência de Mamdani e generalizamos ele para tratar conjuntos *fuzzy* como entrada.

Introduzimos os métodos de inferência disjuntivos. O método de inferência de Mamdani é o método de inferência disjuntivo obtido considerando o mínimo como t-norma. Por conta disso, ele é também chamado método de inferência max-min.

O método de Larsen é obtido considerando a t-norma do produto no método de inferência disjuntivo.

Além de introduzir os métodos de inferência disjuntivos, apresentamos o conceito de regra composicional de inferência e mostramos que os métodos de inferência disjuntivos se enquadram nesse contexto.

Finalmente, apresentamos o conceito de consistência de um método de inferência e a noção de conjuntos *fuzzy* ortonormais, que garantem a consistência de um método de inferência.

Destacamos que, embora desejável, a consistência de um método de inferência não é necessária para o bom desempenho do sistema baseado em regras *fuzzy* em uma aplicação prática.

De fato, o sistema baseados em regras *fuzzy* apresentado na da Aula 7 forneceu excelentes resultados no problema *backing-up a truck* embora os conjuntos *fuzzy* dos antecedentes não forem sup-min ortogonais.

Muito grato pela atenção!