Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 15 – Composições de Relações *Fuzzy*.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na Aula 13, vimos que uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ de U para V é um subconjunto do produto cartesiano $U \times V$, ou seja, $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$.

Sendo um subconjunto *fuzzy*, podemos fazer as operações de intersecção, união e complemento usando os conceitos de conjunção, disjunção e negação *fuzzy*, respectivamente.

Iniciaremos a aula de hoje formalizando a intersecção, união e complemento de relações *fuzzy*.

Em muitas aplicações, porém, uma relação *fuzzy* possui um papel muito diferente de um conjunto *fuzzy*. Nesse contexto, abordaremos a composição de relações *fuzzy* binárias.

Intersecção de Relações *Fuzzy*

Definição 1 (Intersecção de Relações *Fuzzy*)

Seja $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ uma conjunção *fuzzy*. A intersecção de duas relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times V)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

$$\mathcal{Y}(u,v) = \mathcal{C}\Big(\mathcal{R}(u,v), \mathcal{S}(u,v)\Big), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

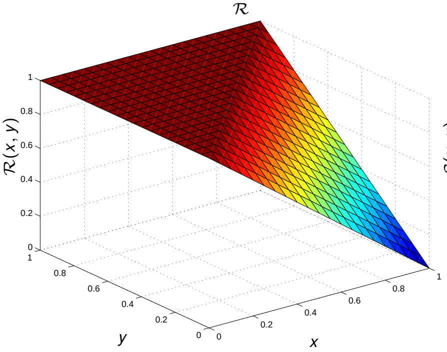
Observação:

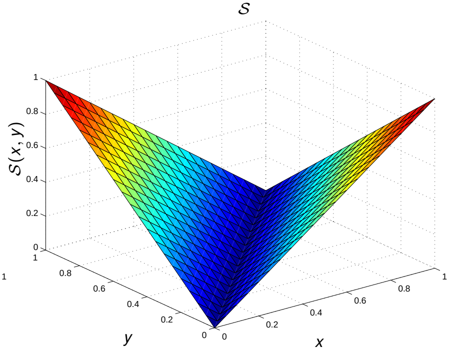
- Tal como na intersecção de conjuntos *fuzzy*, a intersecção de relações *fuzzy* é geralmente definida em termos de uma t-norma.
- Se não for mencionada a conjunção *fuzzy* ou a t-norma, considera-se o mínimo.

Exemplo – Intersecção de Relações *Fuzzy*

Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ dadas por

$$\mathcal{R}(x,y) = 1 \wedge (1 + x - y) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x,y) = |x - y|.$$



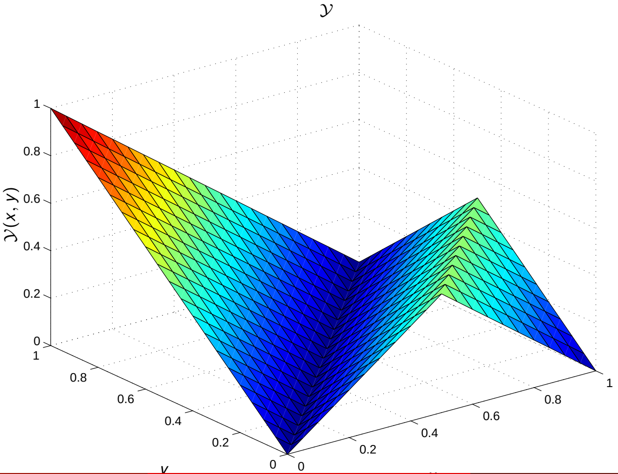


- A relação $\mathcal{R}$ descreve "x é menor ou igual a y".
- A relação $\mathcal{S}$ descreve "x é diferente de y".

Exemplo – Intersecção de Relações *Fuzzy*

A intersecção $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é a relação *fuzzy* dada por

$$\mathcal{Y}(x, y) = (1 + x - y) \wedge |x - y|,$$



União de Relações *Fuzzy*

Definição 2 (União de Relações *Fuzzy*)

Seja $\mathcal{D} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ uma disjunção *fuzzy*. A união de duas relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}(U \times V)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

$$\mathcal{Y}(u,v) = \mathcal{D}\Big(\mathcal{R}(u,v), \mathcal{S}(u,v)\Big), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

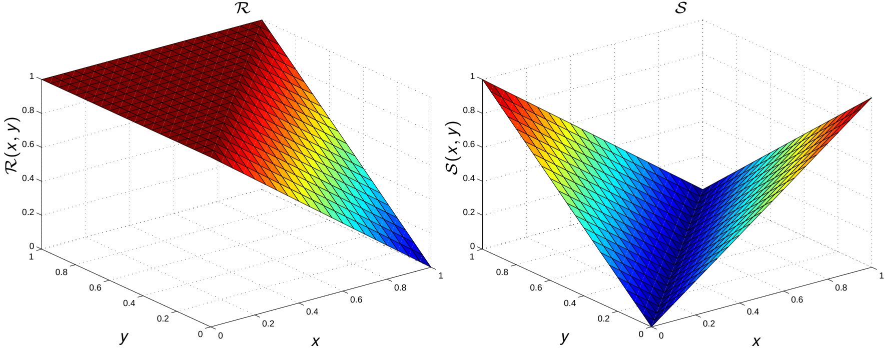
Observação:

- Tal como na união de conjuntos *fuzzy*, a união de relações *fuzzy* é geralmente definida em termos de uma t-conorma.
- Se não for mencionada a disjunção *fuzzy* ou a t-conorma, considera-se o máximo.

Exemplo – União de Relações *Fuzzy*

Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ dadas por

$$\mathcal{R}(x,y) = 1 \wedge (1 + x - y) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x,y) = |x - y|.$$

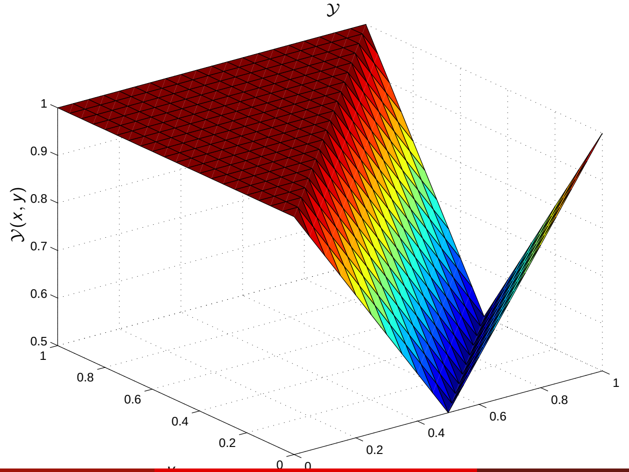


- A relação $\mathcal{R}$ descreve "x é menor ou igual a y".
- A relação $\mathcal{S}$ descreve "x é diferente de y".

Exemplo – União de Relações *Fuzzy*

A união $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ é a relação *fuzzy* dada por

$$\mathcal{Y}(x,y) = \Big(1 \wedge (1 + x - y)\Big) \vee |x - y|$$



Complemento de Relações *Fuzzy*

Definição 3 (Complemento de Relações *Fuzzy*)

Seja $\eta : [0,1] \to [0,1]$ uma negação *fuzzy*. O complemento de uma relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^c$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

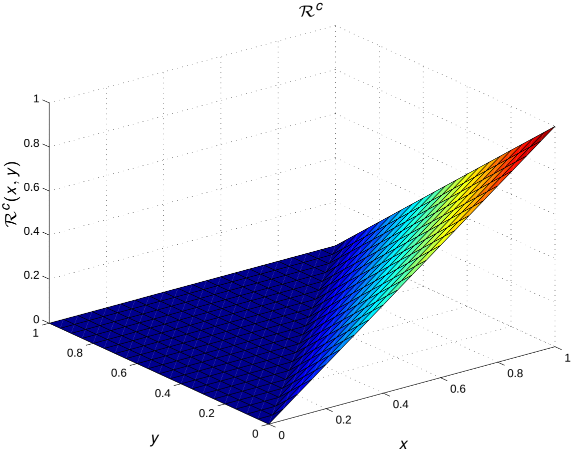
$$\mathcal{Y}(u,v) = \eta\Big(\mathcal{R}(u,v)\Big), \quad \forall (u,v) \in U \times V.$$

Observação:

- Se não for mencionada a negação *fuzzy*, considera-se a negação usual $\eta_S(a) = 1 - a$.

Exemplo – Complemento de Relações *Fuzzy*

A negação usual da relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ é $\mathcal{R}^c$ é
$$\mathcal{R}^c(x,y) = 1 - \Big(1 \wedge (1 + x - y)\Big) = 0 \vee (y - x).$$



Composição de Relações Clássicas

Considere relações clássicas $\mathcal{R} \subseteq U \times V$ e $\mathcal{S} \subseteq V \times W$.

Note que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ definem uma nova relação, chamada composta de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ e denotada por $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, que estabelece uma relação entre elementos de U e W.

Formalmente, a composição de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{S}$ é a relação $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq U \times W$ dada por

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(u, w) : \exists v \in V, (u, v) \in \mathcal{R}, (v, w) \in \mathcal{S}\}.$$

Em palavras, $(u, w) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ se existe $v \in V$ tal que $(u, v) \in \mathcal{R}$ e $(v, w) \in \mathcal{S}$.

De forma alternativa, u e w estão relacionados (em termos de $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$) se u está relacionado com um v (por meio de $\mathcal{R}$) e esse mesmo v está relacionado com w (por meio de $\mathcal{S}$).

Em termos da função característica, temos

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(u,w)=1 \quad &\iff \quad \exists v\in V : \chi_{\mathcal{R}}(u,v)=1 \quad \text{e} \quad \chi_{\mathcal{S}}(v,w)=1. \\
&\iff \quad \exists v\in V : \mathcal{C}\big(\chi_{\mathcal{R}}(u,v),\chi_{\mathcal{S}}(v,w)\big)=1. \\
&\iff \quad \sup_{v\in V}\mathcal{C}\big(\chi_{\mathcal{R}}(u,v),\chi_{\mathcal{S}}(v,w)\big)=1,
\end{aligned}
$$

em que $\mathcal{C}$ denota uma conjunção clássica.

Concluindo, podemos escrever

$$
\chi_{\mathcal{R}\circ\mathcal{S}}(u,w)=\sup_{v\in V}\mathcal{C}\big(\chi_{\mathcal{R}}(u,v),\chi_{\mathcal{S}}(v,w)\big).
$$

Substituindo a função característica pela função de pertinência, obtemos a composição sup-$\mathcal{C}$ para relações *fuzzy*.

Composição Sup-$\mathcal{C}$

Definição 4 (Composição Sup-$\mathcal{C}$)

Seja $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ uma conjunção *fuzzy*. A composição sup-$\mathcal{C}$ de duas relações *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $\mathcal{S} \in \mathcal{F}(V \times W)$, denotada por $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, é a relação *fuzzy* $\mathcal{Y} \in \mathcal{F}(U \times W)$ dada por

$$\mathcal{Y}(u,w) = \sup_{v \in V} \mathcal{C}\big(\mathcal{R}(u,v), \mathcal{S}(v,w)\big).$$

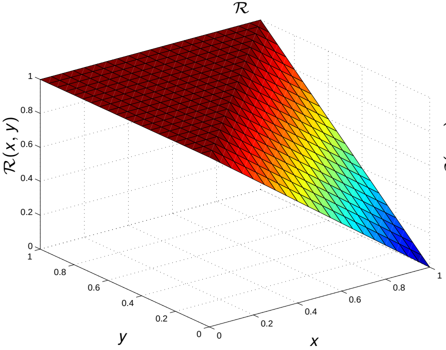
Observação:

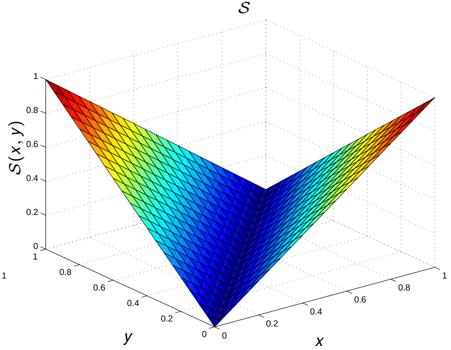
- Geralmente, utiliza-se uma t-norma como conjunção *fuzzy*.
- Se não for mencionada a t-norma, considera-se o mínimo.

Exemplo – Composição Sup-$\mathcal{C}$

Considere as relações *fuzzy* $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{F}([0,1] \times [0,1])$ dadas por

$$\mathcal{R}(x,y) = 1 \wedge (1 + x - y) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(x,y) = |x - y|.$$

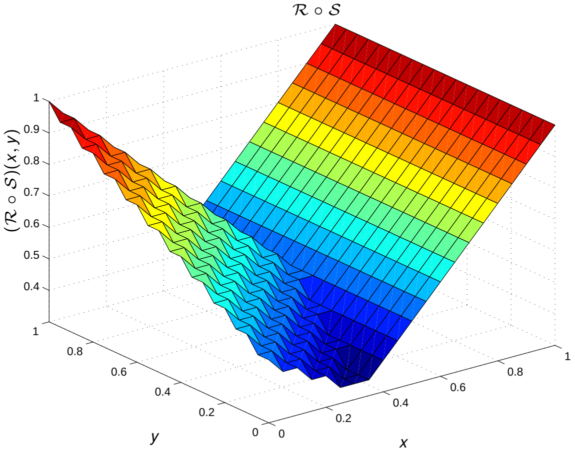




- A relação $\mathcal{R}$ descreve "x é menor ou igual a y".
- A relação $\mathcal{S}$ descreve "x é diferente de y".

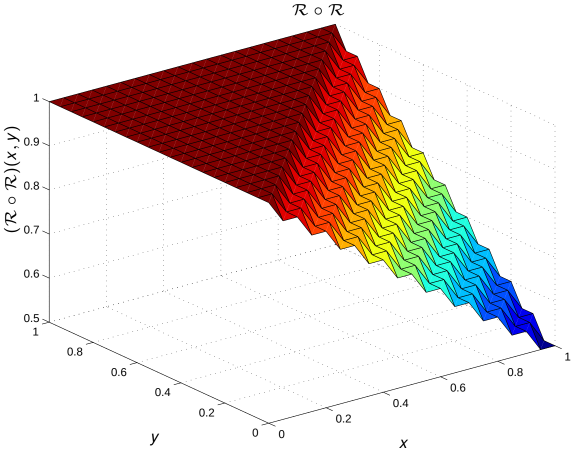
Exemplo – Composição Sup-$\mathcal{C}$

A composição sup-min $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é a relação *fuzzy* dada por
$$\mathcal{Y}(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} (1 - x + z) \wedge |z - y|.$$



Exemplo – Composição Sup-$\mathcal{C}$

Analogamente, a composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ é a relação *fuzzy* dada por
$(\mathcal{R} \circ \mathcal{R})(x, y) = \sup_{z \in [0,1]} (1 - x + z) \wedge (1 - z + y)$.



Composição Relação-Conjunto

Além da composição de relações *fuzzy*, podemos também combinar uma relação com um conjunto *fuzzy*.

Como motivação, considere o seguinte exemplo abstrato:

Exemplo 5

Suponha que $\mathcal{R}$ descreva (de forma muito simplifica) a associação entre febre alta (medida entre $36^o C$ e $40^o C$) e a dor de cabeça (medida em uma escala de 0 a 10).

Sabendo que a temperatura é em torno de $38^o C$, qual será o nível de dor de cabeça?

Em outras palavras, sabendo que a temperatura é um conjunto A, qual será o conjunto da dor de cabeça?

Composição Relação-Conjunto Clássica

Supunha que temos uma relação clássica $\mathcal{R} \subseteq U \times V$ e observamos um conjunto clássico $A \subseteq U$.

Podemos definir o conjunto clássico $B \subseteq V$ de todos os elementos de V que estão relacionados (por meio de $\mathcal{R}$) com algum elemento de A.

Formalmente, definimos o conjunto B da seguinte forma:

$$B = \{v \in V : \exists u \in U, u \in A, (u, v) \in \mathcal{R}\}.$$

Em termos da função de pertinência, temos

$$\begin{aligned}\chi_B(v) = 1 \quad &\iff \quad \exists u \in U : \chi_A(u) = 1 \quad \text{e} \quad \chi_{\mathcal{R}}(u,v) = 1 \\ &\iff \quad \exists u \in U : \mathcal{C}\big(\chi_A(u), \chi_{\mathcal{R}}(u,v)\big) = 1 \\ &\iff \quad \sup_{u \in U} \mathcal{C}\big(\chi_A(u), \chi_{\mathcal{R}}(u,v)\big) = 1,\end{aligned}$$

em que $\mathcal{C}$ denota uma conjunção clássica.

Dessa forma, podemos escrever

$$\chi_B(v) = \sup_{u \in U} \mathcal{C}\big(\chi_A(u), \chi_{\mathcal{R}}(u,v)\big).$$

No caso *fuzzy*, substituímos a função característica pela função de pertinência, ou seja,

$$B(v) = \sup_{u \in U} \mathcal{C}\big(A(u) \triangle \mathcal{R}(u,v)\big),$$

em que $\mathcal{C}$ denota uma conjunção *fuzzy*.

Composições Sup-$\mathcal{C}$ (Relação-Conjunto *Fuzzy*)

Definição 6 (Composição Sup-$\mathcal{C}$ (Relação-Conjunto))

Seja $\mathcal{C}$ uma conjunção *fuzzy* e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy*. Dado um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$, definimos o conjunto *fuzzy* $B = A \circ \mathcal{R} \in \mathcal{F}(V)$ através da seguinte equação:

$$B(v) = \sup_{u \in U} \mathcal{C}\big(A(u), R(u,v)\big), \quad \forall v \in V.$$

Alternativamente, dado um conjunto *fuzzy* $X \in \mathcal{F}(V)$, definimos o conjunto *fuzzy* $Y = \mathcal{R} \circ X \in \mathcal{F}(U)$ através da equação

$$Y(u) = \sup_{v \in U} \mathcal{C}\big(R(u,v), X(v)\big), \quad \forall u \in U.$$

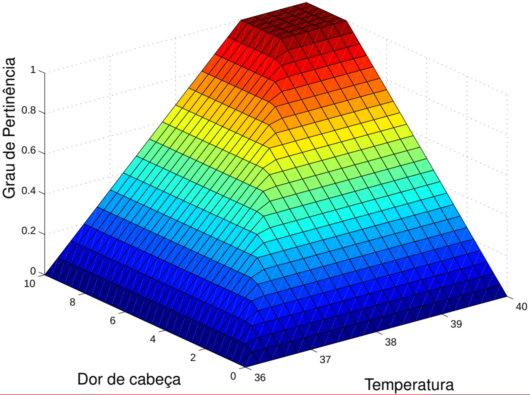
Note que esse segundo caso é equivalente à $Y = X \circ R^{-1}$ com uma escolha apropriada da conjunção *fuzzy* $\mathcal{C}$.

Exemplo – Composição Sup-$\mathcal{C}$

Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([36, 40] \times [0, 10]$, dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{(x - 36)}{3}, \frac{y}{8} \right\},$$

que descreve a associação entre febre alta e a dor de cabeça.

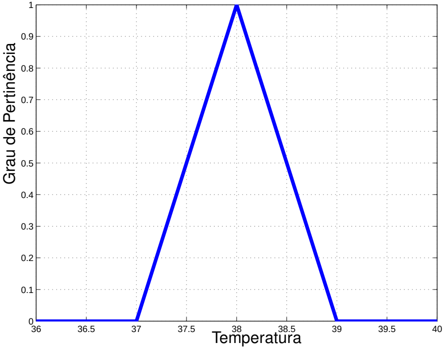


Exemplo – Composição Sup-$\mathcal{C}$

Dado o conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$, em que

$$A(x) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big),$$

que descreve a temperatura em "torno de $38^o C$".

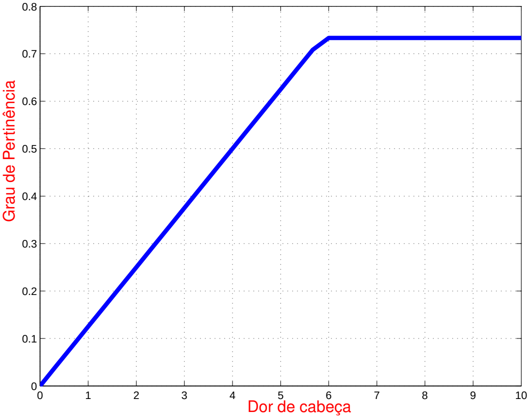


Determine a composição sup-min $B = A \circ \mathcal{R}$

Exemplo – Composição Sup-$\mathcal{C}$

Resposta: Neste caso, a composição sup-min $A \circ \mathcal{R}$ fornece

$$(A \circ \mathcal{R})(y) = 0.75 \wedge \left(\frac{y}{8}\right).$$



Extensão Cilíndrica e Projeção

A composição sup-$\mathcal{C}$ relação-conjunto também pode ser deduzida usando o conceitos de extensão cilíndrica e projeção.

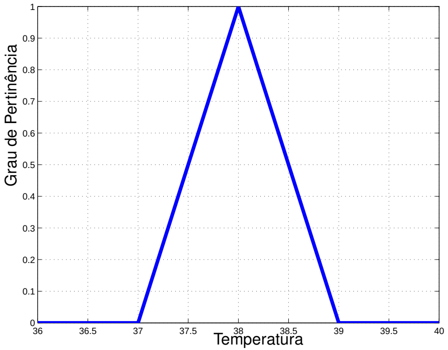
Definição 7 (Extensão Cilíndrica)

A extensão cilíndrica em $U \times V$ de um conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}(U)$ é a relação *fuzzy* $cil(A) \in \mathcal{F}(U \times V)$ dada por

$$cil(A)(u,v) = A(u), \quad \forall u \in U, v \in V.$$

Exemplo – Extensão Cilíndrica

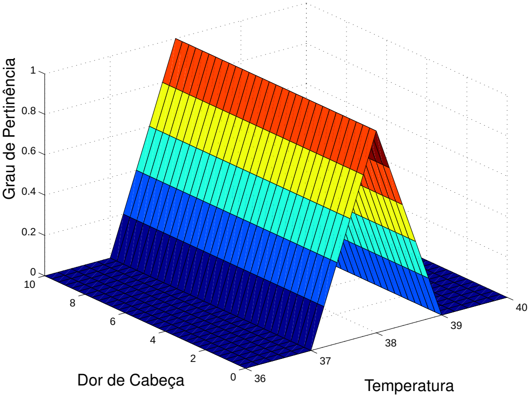
A extensão cilíndrica em $[36, 40] \times [0, 10]$ do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$, dado por $A(x) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big)$,



Exemplo – Extensão Cilíndrica

A extensão cilíndrica em $[36, 40] \times [0, 10]$ do conjunto *fuzzy* $A \in \mathcal{F}([36, 40])$, dado por $A(x) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big)$, é

$$cil(A)(x, y) = 0 \vee \big((x - 37) \wedge (39 - x)\big), \forall x \in [36, 40], y \in [0, 10].$$



Projeção de Relação *Fuzzy*

Definição 8 (Projeção)

Considere uma relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$.

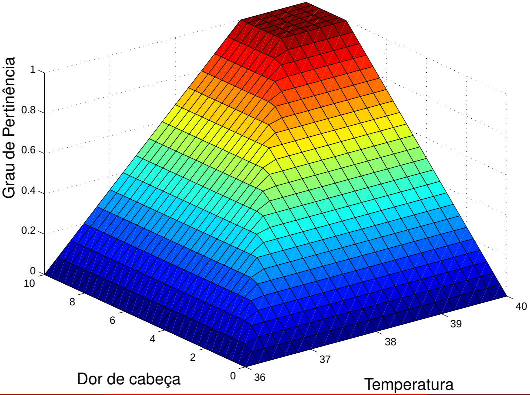
- A projeção de $\mathcal{R}$ em U é o conjunto *fuzzy* $proj_U(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(U)$ dado por
$$proj_U(R)(u) = \sup_{y \in V} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall u \in U.$$
- A projeção de $\mathcal{R}$ em V é o conjunto *fuzzy* $proj_V(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(V)$ dado por
$$proj_V(R)(v) = \sup_{u \in U} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Exemplo – Projeção de Relação *Fuzzy*

Considere a relação *fuzzy* $\mathcal{R} \in \mathcal{F}([36, 40] \times [0, 10]$, dada por

$$\mathcal{R}(x, y) = \min \left\{ 1, \frac{(x - 36)}{3}, \frac{y}{8} \right\},$$

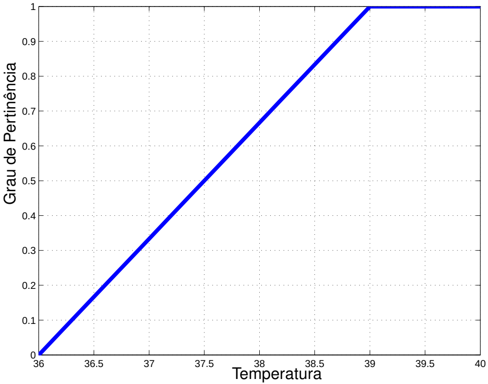
que descreve a associação entre febre alta e a dor de cabeça.



Exemplo – Projeção de Relação *Fuzzy*

A projeção de $\mathcal{R}$ em $U = [36, 40]$ é o conjunto *fuzzy* $proj_U(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(U)$ dado por

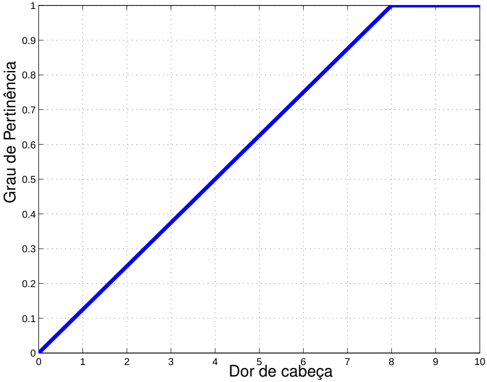
$$proj_U(\mathcal{R}) = \min\left\{1, \frac{(x-36)}{3}\right\}.$$



Exemplo – Projeção de Relação *Fuzzy*

A projeção de $\mathcal{R}$ em $V = [0, 10]$ é o conjunto *fuzzy* $proj_V(\mathcal{R}) \in \mathcal{F}(V)$ dado por

$$proj_V(\mathcal{R}) = \min\left\{1, \frac{y}{8}\right\}.$$



Teorema 9

Seja $\mathcal{C}$ uma conjunção fuzzy e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação fuzzy.

- *Dado um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$, a composição sup-$\mathcal{C}$ $B = A \circ \mathcal{R} \in \mathcal{F}(V)$ satisfaz*

$$B = proj_V\big(cil(A) \cap \mathcal{R}\big).$$

- *Dado um conjunto fuzzy $X \in \mathcal{F}(V)$, a composição sup-$\mathcal{C}$ $Y = \mathcal{R} \circ X \in \mathcal{F}(U)$ satisfaz*

$$Y = proj_U\big(\mathcal{R} \cap cil(X)\big).$$

Aqui, a intersecção é calculada usando a conjunção fuzzy $\mathcal{C}$.

Demonstração.

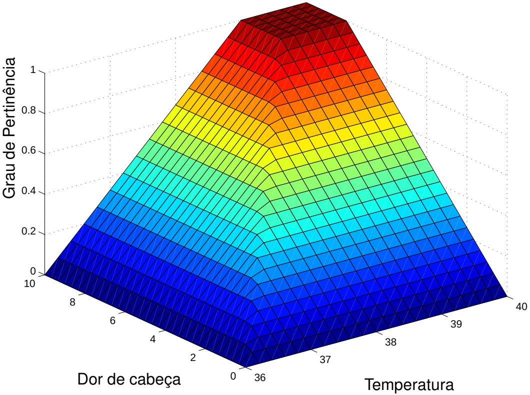
Demonstraremos apenas o primeiro item. Note que

$$\begin{aligned} proj_V\big(cil(A) \cap \mathcal{R}\big)(v) &= \sup_{u \in U} \mathcal{C}\big(cil(A)(u,v) \vartriangle \mathcal{R}(u,v)\big) \\ &= \sup_{u \in U} \mathcal{C}\big(A(u) \vartriangle \mathcal{R}(u,v)\big) \\ &= (A \circ \mathcal{R})(v), \end{aligned}$$

para todo $v \in V$. □

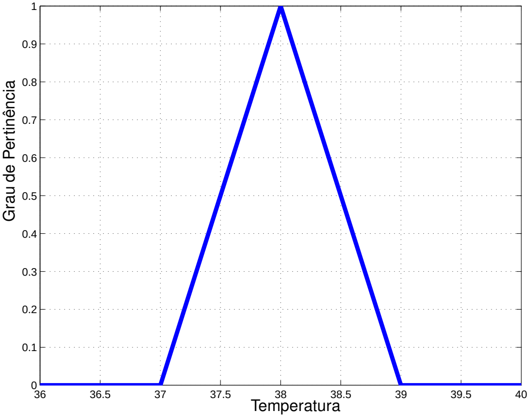
Exemplo – Extensão Cilíndrica e Projeção

Considere a relação $\mathcal{R}$



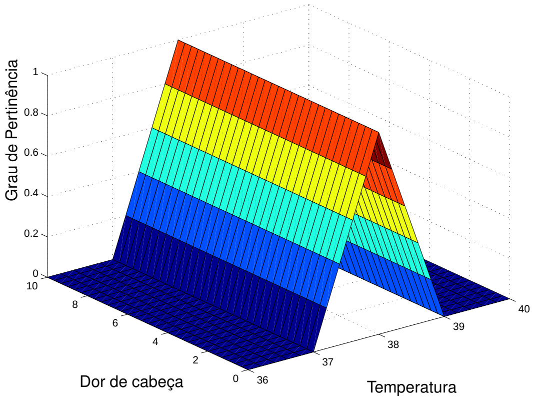
Exemplo – Extensão Cilíndrica e Projeção

E o conjunto *fuzzy* A.



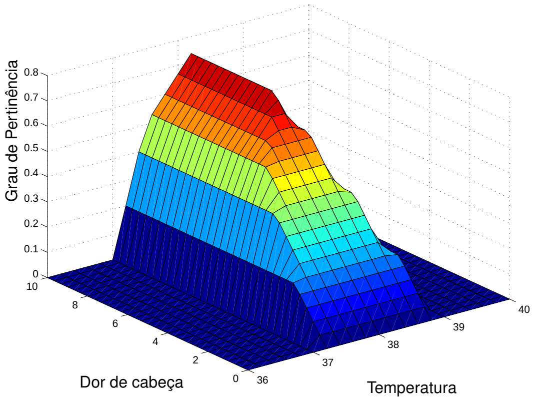
Exemplo – Extensão Cilíndrica e Projeção

A extensão cilíndrica de *A* é a relação



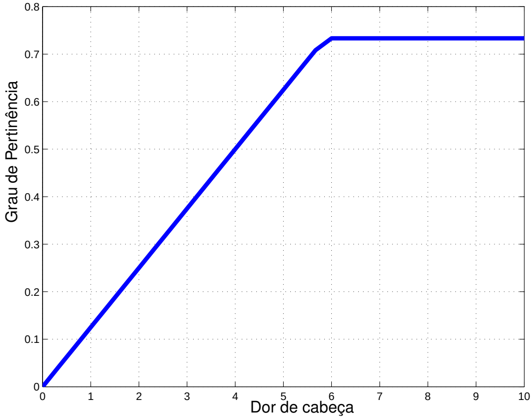
Exemplo – Extensão Cilíndrica e Projeção

A intersecção $cil(A) \cap \mathcal{R}$, calculada usando o mínimo, é



Exemplo – Extensão Cilíndrica e Projeção

A projeção em $V = [0, 10]$ de $cil(A) \cap \mathcal{R}$ é



que é exatamente $A \circ \mathcal{R}$.

Considerações Finais

Na aula de hoje revisamos as operações de união, intersecção e negação de uma relação *fuzzy*, que são definidas interpretando uma relação como um conjunto *fuzzy* no produto Cartesiano.

Na aula de hoje também abordamos as composições sup-$\mathcal{C}$, que combinam duas relações *fuzzy* binárias.

Discutimos, em particular, a composição de uma relação com um conjunto *fuzzy* e sua interpretação em termos da extensão cilíndrica e da projeção.

Nas próximas aulas, estudaremos outros tipos de composição de relações *fuzzy* e as equações relacionais *fuzzy*.

Muito grato pela atenção!