Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 14 – Implicações *Fuzzy*, Medidas de Inclusão e Subsethood.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na aula anterior, apresentamos o conceito de relação *fuzzy*.

Resumidamente, uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ é um conjunto *fuzzy* no produto Cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.

Em particular, temos uma relação *fuzzy* binária se $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$.

Se $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ é uma relação binária em U, dizemos que $\mathcal{R}$ é

(a) **reflexiva** se $\mathcal{R}(u, u) = 1$ para todo $u \in U$.

(b) **simétrica** se $\mathcal{R}(u, v) = \mathcal{R}(v, u)$, para todo $u, v \in U$.

(c) **$\triangle$-transitiva** se $\mathcal{R}(u, w) \geq \mathcal{R}(u, v) \triangle \mathcal{R}(v, w)\ \forall u, v, w \in U$.

(d) **anti-simétrica** se $\mathcal{R}(u, v) > 0$ e $\mathcal{R}(v, u) > 0$ implica $u = v$.

Por exemplo, uma relação reflexiva, simétrica e $\triangle$-transitiva é chamada uma relação de equivalência $\triangle$-*fuzzy*.

Ordem Parcial

Na Aula 10, destacamos que uma relação binária **reflexiva**, **anti-simétrica** e **transitiva** em um conjunto não-vazio U é uma relação de ordem parcial.

A relação de inclusão de conjuntos *fuzzy* é um exemplo de uma ordem parcial em $\mathcal{F}(U)$:

Exemplo 1 (Relação de Inclusão de Conjuntos *Fuzzy*)

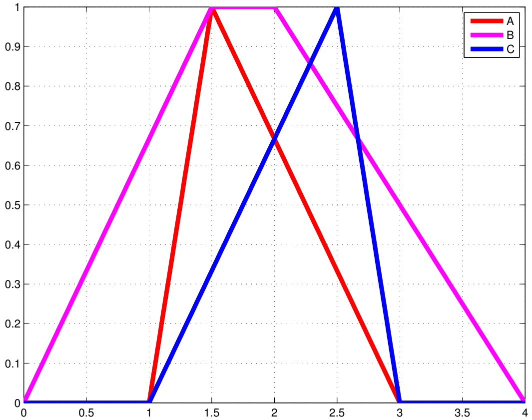
Dizemos que A é um subconjunto de B, denotado $A \subseteq B$, se

$$A(u) \leq B(u), \quad \forall u \in U.$$

Não é difícil verificar que $\subseteq$ é reflexiva ($A \subseteq A$), anti-simétrica ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implica $A = B$) e transitiva ($A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$).

Exemplo

Considere conjuntos *fuzzy* de $\mathbb{R}$ com funções de pertinência: $A(u;1,1.5,3)$, $B(u;0,1.5,2,4)$ e $C(u;1,2.5,3)$.



Note que $A \subseteq B$ porém $A \not\subseteq C$ e $B \not\subseteq C$.

Medida de Inclusão *Fuzzy*

A inclusão de conjuntos *fuzzy* remete a teoria clássica no seguinte sentido: "Um conjunto *fuzzy* A ou está ou não está incluso em B".

Usando o conceito de relação *fuzzy*, podemos atribuir um grau de pertinência para a veracidade da afirmação: "A é subconjunto B".

Formalmente, uma medida de inclusão *fuzzy* estende a afirmação "A é um subconjunto de B" para conjuntos *fuzzy*.

Definição 2 (Medida de Inclusão *Fuzzy*)

Uma função $Inc_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0,1]$ é uma medida de inclusão *fuzzy* se

$$Inc_{\mathcal{F}}(A,B) = \begin{cases} 1, & A \subseteq B, \\ 0, & A \not\subseteq B, \end{cases}$$

para quaisquer conjuntos *crisp* $A, B \subseteq U$.

Na teoria clássica, tem-se $A \subseteq B$ se a proposição

$$p : \forall u \in U, u \in A \rightarrow u \in B,$$

é verdadeira.

Em termos da função característica, tem-se

$\chi_A(u)$	$\chi_B(u)$	$\chi_A(u) \rightarrow \chi_B(u)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

que é a tabela verdade da implicação.

Assim, tem-se $A \subseteq B$ se e somente se

$$\inf_{u \in U} \left[\chi_A(u) \rightarrow \chi_B(u)\right] = 1.$$

Implicação *Fuzzy*

Definição 3 (Implicação *Fuzzy*)

Uma aplicação $I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, também denotada por $I(a,b) = a \to b$, decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo é uma implicação *fuzzy* se satisfaz

$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1 \quad \text{e} \quad I(1,0) = 0.$$

Observe que a implicação *fuzzy* satisfaz a tabela verdade da implicação clássica!

A implicação *fuzzy* é usada da seguinte forma para definir uma classe de medidas de inclusão *fuzzy*:

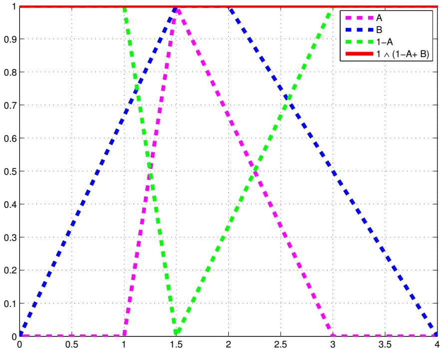
$$Inc_{\mathcal{F}}(A,B) = \inf_{u \in U} \Big[A(u) \to B(u) \Big].$$

Exemplo – Implicação de Lukasiewicz

A implicação de Lukasiewicz é definida pela equação

$$I_L(a,b) = 1 \wedge (1 - a + b) = \min\{1, 1 - a + b\}.$$

Para os conjuntos *fuzzy* mostrados abaixo, tem-se



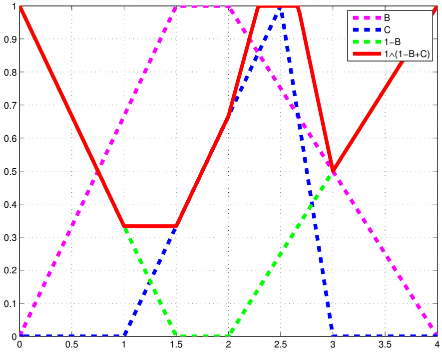
$$Inc_L(A,B) = 1.$$

Exemplo – Implicação de Lukasiewicz

A implicação de Lukasiewicz é definida pela equação

$$I_L(a, b) = 1 \wedge (1 - a + b) = \min\{1, 1 - a + b\}.$$

Para os conjuntos *fuzzy* mostrados abaixo, tem-se



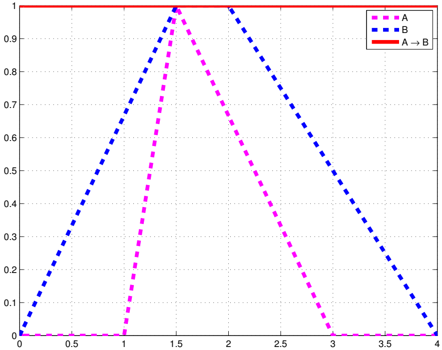
$$Inc_L(B, C) \approx 0.3333.$$

Exemplo – Implicação de Gödel

A implicação de Gödel é definida pela equação:

$$I_M(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ b, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para os conjuntos *fuzzy* mostrados abaixo, tem-se $Inc_M(A,B) = 1$.

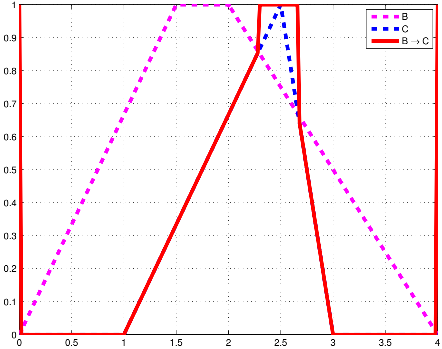


Exemplo – Implicação de Gödel

A implicação de Gödel é definida pela equação:

$$I_M(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ b, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para os conjuntos *fuzzy* mostrados abaixo, tem-se $Inc_M(B,C) = 0$.

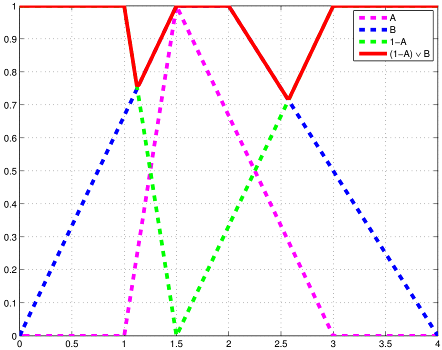


Exemplo – Implicação de Kleene-Dienes

A implicação de Kleene-Dienes é dada por:

$$I_K(a, b) = (1 - a) \vee b = \max\{1 - a, b\}.$$

Para os conjuntos *fuzzy* mostrados abaixo, tem-se



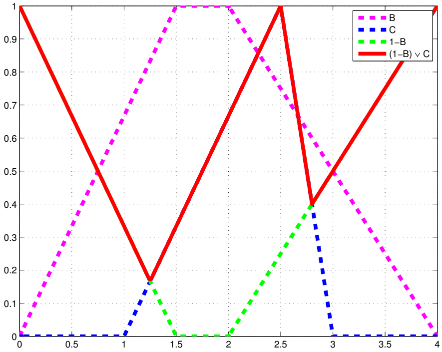
$$Inc_K(A, B) \approx 0.7200.$$

Exemplo – Implicação de Kleene-Dienes

A implicação de Kleene-Dienes é dada por:

$$I_K(a, b) = (1 - a) \vee b = \max\{1 - a, b\}.$$

Para os conjuntos *fuzzy* mostrados abaixo, tem-se



$$Inc_K(B, C) \approx 0.1733.$$

Apesar de uma medida de inclusão *fuzzy* estender a relação de inclusão clássica, não é necessariamente uma relação reflexiva.

Além disso, embora avaliem a veracidade da afirmação "A é um subconjunto de B" quando A e B são conjuntos *fuzzy*, as medidas de inclusão *fuzzy* ainda remetem à teoria clássica.

Exemplo 4

Considere conjuntos clássicos

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 4, 5\} \quad \text{e} \quad C = \{4, 5, 6\}.$$

Note que nenhum conjunto está contido no outro. Além disso, sendo A, B e C conjuntos clássicos, tem-se

$$Inc_{\mathcal{F}}(A, B) = Inc_{\mathcal{F}}(A, C) = 0,$$

para qualquer medida de inclusão *fuzzy*.

Contudo, podemos esperar que A está mais contido em B do que

Medida *Subsethood*

Definição 5 (Medida *subsethood*)

Uma aplicação $S : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ é uma medida *subsethood* se satisfaz

(a) $S(A, B) = 1$ se $A \subseteq B$.

(b) $S(U, \emptyset) = 0$.

(c) Se $A \subseteq B \subseteq C$, então

$$S(C, A) \leq S(B, A) \quad \text{e} \quad S(C, A) \leq S(C, B).$$

Exemplo 6

As medidas de inclusão Inc_L e Inc_M são também medidas *subsethood*.

Medidas *subsethood* podem ser definidas como segue:

$$S^{\cap}(A,B) = \begin{cases} 1, & A = \emptyset, \\ \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(A)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$S^{\cup}(A,B) = \begin{cases} 1, & A \cup B = \emptyset, \\ \dfrac{Card(B)}{Card(A \cup B)}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 7

Se $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,4,5\}$ e $C = \{4,5,6\}$, então

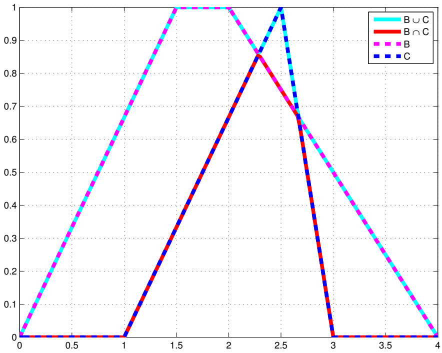
$$S^{\cap}(A,B) = 2/3 \quad \text{e} \quad S^{\cap}(A,C) = 0.$$

Analogamente,

$$S^{\cup}(A,B) = 4/5 \quad \text{e} \quad S^{\cap}(A,C) = 1/2.$$

Exemplo

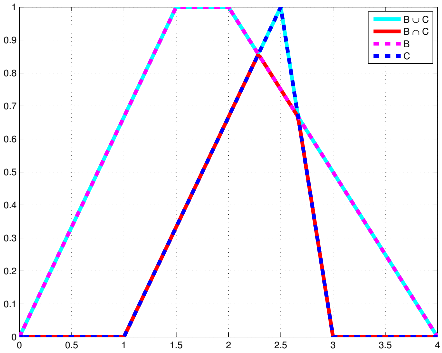
Considere o máximo e o mínimo para calcular a união e intersecção de conjuntos *fuzzy*. Nesse caso, tem-se



$$S^{\cap}(B, C) = \frac{Card(B \cap C)}{Card(B)} \approx 0.4232$$

Exemplo

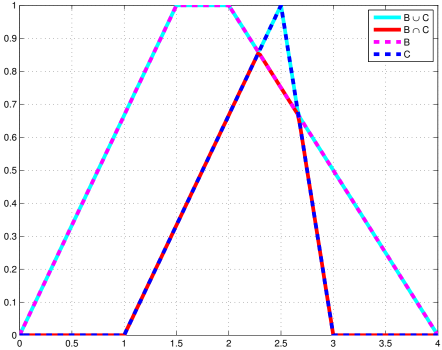
Considere o máximo e o mínimo para calcular a união e intersecção de conjuntos *fuzzy*. Nesse caso, tem-se



$$S^{\cup}(B, C) = \frac{Card(C)}{Card(B \cup C)} \approx 0.4352.$$

Exemplo

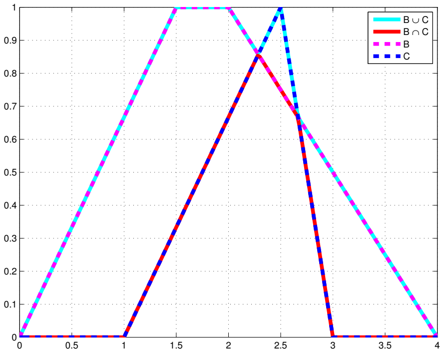
Considere o máximo e o mínimo para calcular a união e intersecção de conjuntos *fuzzy*. Nesse caso, tem-se



$$S^{\cap}(C,B) = \frac{Card(B \cap C)}{Card(C)} \approx 0.9523$$

Exemplo

Considere o máximo e o mínimo para calcular a união e intersecção de conjuntos *fuzzy*. Nesse caso, tem-se



$$S^{\cup}(C, B) = \frac{Card(B)}{Card(B \cup C)} \approx 0.9792.$$

Na teoria clássica, tem-se $A = B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Dada uma medida *subsethood* e uma norma triangular $\triangle$, pode-se definir uma medida de similaridade Sim_S como segue

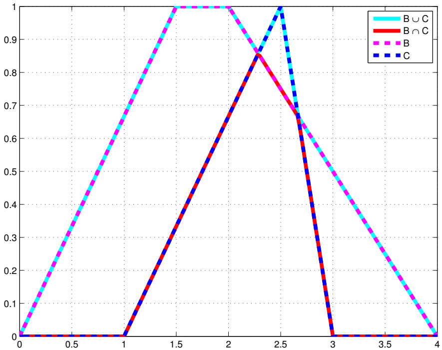
$$Sim_S(A, B) = S(A, B) \triangle S(B, A).$$

Note que o conectivo "e" é modelado por uma t-norma pois uma conjunção fuzzy pode não ser comutativa.

Além disso, uma medida *subsethood* é usada porque uma medida inclusão *fuzzy* pode violar uma das 4 propriedades da medida de similaridade.

Exemplo

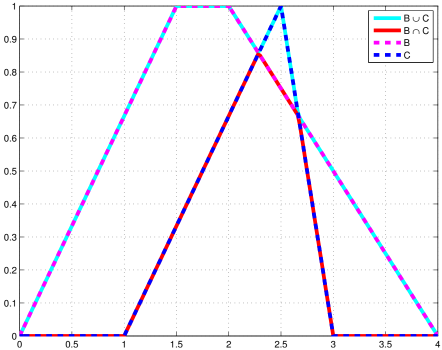
Considere o mínimo e o máximo como t-norma e t-conorma. Tem-se



$$S^{\cap}(B,C) \approx 0.4232, \quad S^{\cap}(C,B) \approx 0.9523 \quad \text{e} \quad Sim_{S^{\cap}}(B,C) = 0.4232.$$

Exemplo

Considere o mínimo e o máximo como t-norma e t-conorma. Tem-se



$$S^{\cup}(B,C) \approx 0.4352, \quad S^{\cup}(C,B) \approx 0.9792 \quad \text{e} \quad Sim_{S^{\cup}}(B,C) = 0.4352.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o conceito de implicação *fuzzy* que estende a implicação clássica para o intervalo $[0, 1]$.

Na aula de hoje apresentamos também os conceitos de medida de inclusão e *subsethood* que avaliam o grau de veracidade da afirmação: "o conjunto *fuzzy* A está contido no conjunto *fuzzy* B".

Em termos gerais, destacamos as seguintes características:

- A medida de inclusão estende a relação de inclusão clássica para conjuntos *fuzzy* e pode ser definida através do ínfimo da implicação *fuzzy* do grau de inclusão.
- A medida de *subsethood* é consistente com a relação usual de inclusão de conjuntos *fuzzy* e pode ser definida, por exemplo, usando a cardinalidade dos conjuntos envolvidos.

Muito grato pela atenção!