Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 13 – Relações *Fuzzy* e Medidas de Similaridade *Fuzzy*.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Relação Clássica

Uma relação clássica expressa a presença ou ausência de uma associação, interação ou interconexão entre elementos de dois ou mais conjuntos. Formalmente, temos:

Definição 1 (Relação Clássica)

Uma relação $\mathcal{R}$ entre conjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ é um subconjunto do produto Cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, ou seja,

$$\mathcal{R} \subseteq U_1 \times \ldots \times U_n.$$

A n-upla $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{R}$ se, e somente se, os elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ estão relacionados.

Uma relação $\mathcal{R}$ definida no produto Cartesiano $U \times V$ de dois conjuntos é chamada **relação binária**.

Exemplo

Considere os conjuntos

$$X = \{\text{Brasil}, \text{Portugal}, \text{França}, \text{Estados Unidos}, \text{Canadá}\},$$

$$Y = \{\text{Português}, \text{Francês}, \text{Inglês}\},$$

e

$$Z = \{\text{Real}, \text{Dólar}, \text{Euro}\}.$$

Determine a relação $\mathcal{R}$ que associa o país com a língua e a moeda.

Exemplo

Considere os conjuntos

$$X = \{\text{Brasil}, \text{Portugal}, \text{França}, \text{Estados Unidos}, \text{Canadá}\},$$

$$Y = \{\text{Português}, \text{Francês}, \text{Inglês}\},$$

e

$$Z = \{\text{Real}, \text{Dólar}, \text{Euro}\}.$$

Determine a relação $\mathcal{R}$ que associa o país com a língua e a moeda.

Resposta: A relação é

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{Brasil,Português,Real}), (\text{Portugal,Português,Euro}), \\ (\text{França,Francês,Euro}), (\text{Estados Unidos,Inglês,Dólar}), \\ (\text{Canadá,Inglês,Dólar}), (\text{Canadá,Francês,Dólar}) \end{array} \right\}.$$

Note que (Brasil,Inglês, Dólar) não pertence à $\mathcal{R}$. Logo, inglês não é a língua franca ou o dólar não é a unidade monetária do Brasil.

Exemplo

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s). Um estudo de interesse é o processo de predação, isto é, a relação **presa-predador**.

Em termos matemáticos, sejam $U = \{a, c, i, l, s\}$ e $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ tal que $(u, v) \in \mathcal{R}$ se u é predador de v. A relação $\mathcal{R}$ pode ser representada pela tabela:

		presa				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
predador	a	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$
	c	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$
	i	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
	l	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
	s	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\times$

Exemplo

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s). Um estudo de interesse é o processo de predação, isto é, a relação **presa-predador**.

Em termos matemáticos, sejam $U = \{a, c, i, l, s\}$ e $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ tal que $(u, v) \in \mathcal{R}$ se u é predador de v. A relação $\mathcal{R}$ pode ser representada pela tabela:

		presa				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
predador	a	0	1	0	1	1
	c	0	0	0	1	1
	i	0	0	1	0	0
	l	0	0	0	0	0
	s	0	0	1	0	0

Grafos e Relações Binárias

Podemos representar uma relação $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ por um grafo orientado (dígrafo) $\mathcal{G}(U, \mathcal{R})$ quando $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto finito. Note que U é o conjunto dos vértices do dígrafo e as arestas são determinadas pela relação $\mathcal{R}$, ou seja, existe uma aresta ligando u e v se $(u, v) \in \mathcal{R}$.

Por exemplo, a relação presa-predador do exemplo anterior pode ser representada pelo seguinte dígrafo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr] & & l \\
i \arrow[loop above] & & s \arrow[ll] & & c \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Relação *Fuzzy*

Uma relação *fuzzy* permite graus ou forças de associação, interação ou interconexão entre elementos. Formalmente, tem-se:

Definição 2 (Relação *Fuzzy*)

Uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ é um conjunto *fuzzy* do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, ou seja, $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U_1 \times \ldots \times U_n)$, que é caracterizado por uma função de pertinência

$$\mathcal{R} : U_1 \times \ldots \times U_n \to [0, 1].$$

O grau de pertinência de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ em $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

indica a força da relação (associação, interação ou interconexão) entre os elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Exemplo

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s). O estudo do processo de predação pode ser melhor descrito considerando uma relação *fuzzy* que indica o preferência de um predador por alguma presa.

Formalmente, sejam $U = \{a, c, i, l, s\}$ e $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ tal que $\mathcal{R}(u, v)$ representa o grau com que u tem preferência por v:

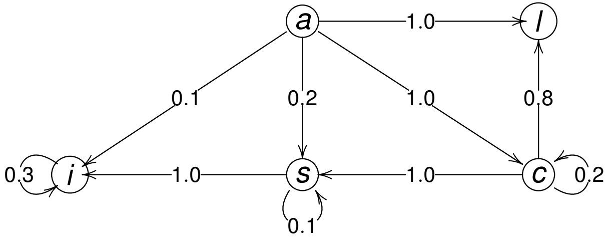
presa

	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
predador	a	0.0	1.0	0.1	1.0	0.2
	c	0.0	0.2	0.0	0.8	1.0
	i	0.0	0.0	0.3	0.0	0.0
	l	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	s	0.0	0.0	1.0	0.0	0.1

Grafos e Relações *Fuzzy* Binárias

Podemos representar uma relação *fuzzy* $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ por um grafo orientado (dígrafo) ponderado $\mathcal{G}(U, \mathcal{R})$ quando $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto finito. Note que U é o conjunto dos vértices do dígrafo e os pesos das arestas são determinadas pela relação $\mathcal{R}$, ou seja, o peso de uma aresta ligando u e v é $\mathcal{R}(u, v)$.

Por exemplo, a relação presa-predador do exemplo anterior pode ser representada pelo seguinte dígrafo:



Relações *Fuzzy* Binárias

Definição 3 (Relação Inversa)

Seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy* binária. A relação *fuzzy* inversa de $\mathcal{R}$ tem função de pertinência $\mathcal{R}^{-1} : V \times U \to [0, 1]$ dada por

$$\mathcal{R}^{-1}(v, u) = \mathcal{R}(u, v).$$

Exemplo

A relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ da relação de preferência de predação do ecossistema do exemplo anterior é dada pela tabela:

		predador				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
presa	a	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	c	1.0	0.2	0.0	0.0	0.0
	i	0.1	0.0	0.3	0.0	1.0
	l	1.0	0.8	0.0	0.0	0.0
	s	0.2	1.0	0.0	0.0	0.1

Note a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$ é obtida trocando as linhas por colunas de $\mathcal{R}$, e vice-versa. Por isso, muitos autores adotam o termo "transposta de $\mathcal{R}$" no lugar de "inversa de $\mathcal{R}$".

Definição 4

Seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação *fuzzy* binária.

- O domínio de $\mathcal{R}$, denotado por $Dom\mathcal{R}$, é o conjunto *fuzzy* de U dado por
$$Dom\mathcal{R}(u) = \sup_{v \in V} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall u \in U.$$
- A imagem de $\mathcal{R}$, denotado por $Imag\mathcal{R}$, é o conjunto *fuzzy* de V dado por
$$Imag\mathcal{R}(v) = \sup_{v \in V} \mathcal{R}(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Em outras palavras, $Dom\mathcal{R}$ e $Imag\mathcal{R}$ são respectivamente os máximos por linha e por coluna.

Exemplo

Considere o ecossistema e a relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ do exemplo anterior.

Neste caso, tem-se

$$Dom\mathcal{R} = [\underbrace{1.0}_{a}, \underbrace{1.0}_{c}, \underbrace{0.3}_{i}, \underbrace{0.0}_{l}, \underbrace{1.0}_{s}].$$

Portanto, a lebre não é predador de nenhuma espécie enquanto que o grau com que os insetos são predadores é 0.3. A águia, a cobra e o sapo são predadores com grau 1.0.

Analogamente, tem-se

$$Imag\mathcal{R} = [\underbrace{0.0}_{a}, \underbrace{1.0}_{c}, \underbrace{1.0}_{i}, \underbrace{1.0}_{l}, \underbrace{1.0}_{s}].$$

Logo, a águia não é presa enquanto que todas as outras espécies são presas de algum predador.

Relações binárias definidas no produto cartesiano de um único conjunto U possuem um papel importante.

Definição 5

Seja $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ uma relação *fuzzy*. Dizemos que $\mathcal{R}$ é

(a) **reflexiva** se $\mathcal{R}(u, u) = 1$ para todo $u \in U$.
"Todo elemento tem relação máxima consigo próprio."

(b) **simétrica** se $\mathcal{R}(u, v) = \mathcal{R}(v, u)$, para todo $u, v \in U$.
"Há reciprocidade com a mesma pertinência entre elementos relacionados."

(c) $\triangle$**-transitiva** se $\mathcal{R}(u, w) \geq \mathcal{R}(u, v) \triangle \mathcal{R}(v, w)\ \forall u, v, w \in U$.
"A relação entre dois elementos não deve ser inferior a relação deles com os demais elementos."

(d) **anti-simétrica** se $\mathcal{R}(u, v) > 0$ e $\mathcal{R}(v, u) > 0$ implica $u = v$.
"A relação não admite reciprocidade entre indivíduos distintos."

Exemplo 6

- Uma relação de hierarquia do tipo “*u* é superior a *v*” pode ser transitiva e anti-simétrica, mas não pode ser simétrica.
- A relação de amizade entre dois indivíduos pode ser simétrica e reflexiva, mas não pode ser transitiva.

Definição 7 (Relação de Equivalência)

Uma relação $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U \times U)$ reflexiva, simétrica e $\triangle$-transitiva é chamada **relação de equivalência $\triangle$-*fuzzy***.
Se $\triangle = \wedge$, dizemos simplesmente que $\mathcal{R}$ é uma **relação de equivalência *fuzzy***.

Exemplo 8

A relação “*u* tem aproximadamente a mesma idade que *v*” pode ser modelada como uma relação de equivalência *fuzzy*.

Medidas de Similaridade

Dois conjuntos *fuzzy* A e B, definidos ambos em U, são iguais se possuem a mesma função de pertinência, ou seja,

$$A(u) = B(u), \quad \forall u \in U.$$

A relação igualdade de conjuntos *fuzzy* é uma relação clássica em $\mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U)$ reflexiva, simétrica e transitiva.

Na teoria *fuzzy*, podemos atribuir um grau de veracidade para a afirmação "*A* é igual a *B*" (De Baets e De Meyer, 2005):

Definição 9 (Medida de Similaridade)

Uma relação *fuzzy* binária $\mathcal{S} : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ simétrica é chamada **relação de similaridade *fuzzy***.

Exemplo - Coeficiente de Jaccard

Considere conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(U)$ definidos em um universo de discurso finito $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. A seguinte relação, chamada coeficiente de Jacard, é uma medida de similaridade *fuzzy* para qualquer t-norma $\triangle$ e t-conorma $\triangledown$:

$$\mathcal{S}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \big(A(u_i) \triangle B(u_i)\big)}{\sum_{j=1}^{n} \big(A(u_j) \triangledown B(u_j)\big)},$$

Com efeito, sendo $\triangle$ e $\triangledown$ operações comutativas, tem-se $\mathcal{S}(A, B) = \mathcal{S}(B, A)$. Equivalentemente, podemos escrever

$$\mathcal{S}(A, B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A \cup B)},$$

em que a intersecção e a união são definidas usando uma t-norma e uma t-conorma e $\#X = \sum_{i=1}^{n} X(u_i)$ denota a cardinalidade do conjunto *fuzzy* $X \in \mathcal{F}(U)$.

No caso mais geral, definimos o coeficiente de Jaccard entre dois conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(U)$ através da equação

$$\mathcal{S}(A,B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A \cup B)},$$

em que a intersecção e a união são definidas usando uma t-norma e uma t-conorma e a cardinalidade do conjunto *fuzzy* $X \in \mathcal{F}(U)$ é dada por

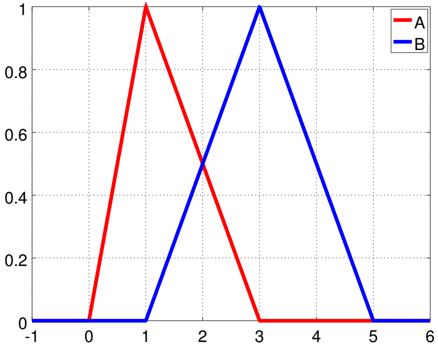
- $\#X = \sum_{i=1}^{n} X(u_i)$ se $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é um universo de discurso finito.
- $\#X = \int X(u)du$ se a integral estiver bem definida.

Exemplo

Considere conjuntos *fuzzy* triangulares

$$A \equiv A(x;0,1,2) \quad \text{e} \quad B \equiv B(x;1,3,5),$$

cujo gráfico das funções de pertinência é:



Usando o mínimo e o máximo com t-norma e t-conorma, temos que

$$\#(A \cap B) = 0.5 \quad \text{e} \quad \#(A \cup B) = 3.$$

Logo, a similaridade de A e B, conforme o coeficiente de Jaccard, é:

$$\mathcal{S}(A, B) = \frac{0.5}{3.0} = \frac{1}{6}.$$

Analogamente, usando a seguinte t-norma e a t-conorma

$$x \bigtriangleup_P y = xy \quad \text{e} \quad x \bigtriangledown_P y = x + y - xy,$$

obtemos

$$\mathcal{S}(A, B) = \frac{0.3333}{3.1667} = 0.10526.$$

Medida de Similaridade *Fuzzy* de Xuecheng

Uma outra definição mais restrita de medida de similaridade é apresentada abaixo (Xuecheng, 1992):

Definição 10 (Medida de Similaridade *Fuzzy* de Xuecheng)

Uma aplicação $\mathcal{S} : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to [0, 1]$ é uma medida de similaridade (normalizada) *fuzzy* de Xuecheng se satisfaz

(a) $\mathcal{S}(A, B) = \mathcal{S}(B, A)$.

(b) $\mathcal{S}(A, A) = 1$.

(c) $\mathcal{S}(A, A^c) = 0$ para todo conjunto clássico $A \in \mathcal{P}(U)$.

(d) Se $A \subseteq B \subseteq C$ então

$$\mathcal{S}(A, B) \geq \mathcal{S}(A, C) \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(B, C) \geq \mathcal{S}(A, C).$$

Uma medida de similaridade *fuzzy* é dita **forte** se $\mathcal{S}(A, B) = 1$ implica $A = B$.

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o conceito de relação *fuzzy*.

Uma relação *fuzzy* $\mathcal{R}$ é simplesmente um conjunto *fuzzy* no produto Cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, ou seja, $\mathcal{R} \in \mathcal{F}(U_1 \times \ldots \times U_n)$.

Além de introduzir relações *fuzzy*, destacamos também alguns conceitos das relações binárias, incluindo reflexividade, simetria, $\triangle$-transitividade e anti-simetria.

Esses conceitos foram usados, por exemplo, para definir o conceito de medida de similaridade *fuzzy*, que mede o grau de veracidade da afirmação "A é igual a B", para conjuntos *fuzzy* $A, B \in \mathcal{F}(U)$.

Muito grato pela atenção!