Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 12 – Conjuntos *Fuzzy* do Tipo *n*.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na aula de hoje apresentaremos o conceito de conjuntos fuzzy do tipo n, que foram introduzidos por Zadeh em 1975.

O conceito de conjunto fuzzy do tipo n pode ser usado para incorporar incertezas que surgem na formulação de um conjunto fuzzy.

Veremos, em particular, que um conjunto fuzzy do tipo n é um caso particular de um conjunto $\mathbb{L}$-fuzzy.

Particular atenção será dada para os conjuntos fuzzy do tipo 2.

Motivação para Conjuntos Fuzzy do Tipo n

Quando um conceito não possui fronteiras bem definidas, um conjunto fuzzy (que chamaremos do tipo 1) é mais apropriado que um conjunto clássico.

Ainda assim, num conjunto fuzzy (do tipo 1) precisamos especificar exatamente sua função de pertinência.

Se não sabemos como determinar o valor exato da pertinência de um elemento num certo conceito, podemos descrever a pertinência usando um conjunto fuzzy do intervalo $[0, 1]$.

Observando que um conjunto fuzzy também é caracterizado por uma função de pertinência, podemos prosseguir com o mesmo raciocínio para introduzir o conceito de conjuntos fuzzy do tipo n, para $n = 2, 3, \ldots$.

Conjunto Fuzzy do Tipo n

Um conjunto fuzzy do tipo n é definido recursivamente como segue (Zadeh, 1975):

Definição 1 (Conjunto Fuzzy do Tipo n)

Seja U um universo de discurso. Um conjunto fuzzy A do tipo 1 de U é caracterizado por uma função de pertinência $\varphi_A : U \to [0, 1]$ que associa a cada elemento $u \in U$ um valor $\varphi_A(u)$ no intervalo $[0, 1]$.

Um conjunto fuzzy do tipo n de U, em que n é um inteiro maior que 1, é caracterizado por uma função de pertinência que associa a cada elemento $u \in U$ um conjunto fuzzy do tipo $n - 1$ de $[0, 1]$.

Formalmente, seja $\mathcal{F}_n(U)$ a família de todos os conjuntos fuzzy do tipo $n \geq 1$ de U. Um conjunto fuzzy $\tilde{A}$ do tipo $n \geq 2$ de U é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_{\tilde{A}} : U \to \mathcal{F}_{n-1}([0, 1])$.

Conjuntos Fuzzy do Tipo n e $\mathbb{L}$-fuzzy

Lembre-se que a família de todos os conjuntos fuzzy (do tipo 1) $\mathcal{F}(U)$ é um reticulado completo com a ordem induzida da ordem usual do intervalo $[0,1]$. Em outras palavras, dados conjuntos $A, B \in \mathcal{F}(U)$, tem-se

$$A \subseteq_1 B \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_A(u) \leq \phi_B(u), \quad \forall u \in U.$$

Analogamente, $\mathcal{F}_n(U)$ é um reticulado completo com a ordem induzida de $\mathcal{F}_{n-1}([0,1])$, i.e., dados $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_n(U)$, tem-se

$$\tilde{A} \subseteq_n \tilde{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_{\tilde{A}}(u) \subseteq_{(n-1)} \mu_{\tilde{B}}(u), \quad \forall u \in U.$$

Portanto, conjuntos fuzzy do tipo n também são conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy.

Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

Apesar de introduzirmos conjuntos fuzzy do tipo n, raramente consideramos $n > 2$.

Em vista dessa observação, focaremos nossa atenção em conjuntos fuzzy do tipo 2.

Conjuntos fuzzy do tipo 2 são apropriados quando temos incerteza sobre função de pertinência de um conceito linguístico.

Com efeito, um conjunto fuzzy $\tilde{A}$ do tipo 2 é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_{\tilde{A}} : U \rightarrow \mathcal{F}([0, 1])$.

As operações de intersecção, união e complemento de um conjunto fuzzy do tipo 2 são definidas usando o princípio de extensão de Zadeh (veja Aula 5).

Intersecção Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

A intersecção de conjuntos fuzzy $A, B \in \mathcal{F}(U)$ (do tipo 1) é definida como segue usando uma conjunção fuzzy $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$:

$$\varphi_{A \cap B}(u) = \mathcal{C}\big(\varphi_A(u), \varphi_B(u)\big), \quad \forall u \in U.$$

De um modo similar, a intersecção de conjuntos fuzzy $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_2(U)$ é definida como segue

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(u) = \hat{\mathcal{C}}\big(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\big), \quad \forall u \in U,$$

em que $\hat{\mathcal{C}} : \mathcal{F}([0,1]) \times \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ é a extensão de Zadeh de uma conjunção fuzzy $\mathcal{C}$ dada pela seguinte equação para todo conjunto fuzzy (do tipo 1) $X, Y \in \mathcal{F}([0,1])$:

$$\hat{\mathcal{C}}(X, Y)(z) = \sup_{\{(x,y): z = \mathcal{C}(x,y)\}} X(x) \wedge Y(y), \quad \forall z \in [0,1].$$

União e Complemento de Conjuntos Fuzzy Tipo 2

De um modo análogo, a união e o complemento de conjuntos fuzzy $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_2(U)$ são definidos como segue para todo $u \in U$

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(u) = \hat{\mathcal{D}}\big(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\big),$$
$$\mu_{\tilde{A}^c}(u) = \hat{\eta}\big(\mu_{\tilde{A}}(u)\big),$$

em que $\hat{\mathcal{D}} : \mathcal{F}([0,1]) \times \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ é a extensão de Zadeh de uma disjunção fuzzy $\mathcal{D} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ e $\hat{\eta} : \mathcal{F}([0,1]) \to \mathcal{F}([0,1])$ é a extensão de Zadeh de uma negação fuzzy $\eta : [0,1] \to [0,1]$.

Redução de Tipo

Um método de redução de tipo é uma aplicação $R : \mathcal{F}_n(U) \to \mathcal{F}_{n-1}(U)$ que transforma um conjunto fuzzy do tipo n num conjunto fuzzy do tipo $n - 1$.

Uma redução de tipo $R : \mathcal{F}_2(U) \to \mathcal{F}(U)$ pode ser definida como segue para transformar um conjunto fuzzy $\tilde{A}$ do tipo 2 num conjunto fuzzy do tipo 1:

$$R(\tilde{A})(u) = \texttt{defuzz}\left(\mu_{\tilde{A}}(u)\right), \quad \forall u \in U, \tag{1}$$

em que $\texttt{defuzzy} : \mathcal{F}([0,1]) \to [0,1]$ denota uma técnica de defuzzificação como, por exemplo, o centro de área.

Apesar de sua simplicidade, um método de redução de tipo definido por (1) pode ser inviável computacionalmente. Métodos para a redução de tipo foram desenvolvidos por Karnik e Mendel (2001).

Uma Interpretação Alternativa

Diferente da definição recursiva, um conjunto fuzzy do tipo 2 pode ser definido de forma alternativa como segue:

Definição 2 (Conjunto Fuzzy do Tipo 2)

Um conjunto fuzzy $\tilde{A}$ do tipo 2 em um universo de discurso U é definido por

$$\tilde{A} = \left\{ \big((u,x), \varphi_{\tilde{A}}(u,x)\big) : 0 \leq \varphi_{\tilde{A}}(u,x) \leq 1, \forall x \in [0,1], \forall u \in U \right\}.$$

Em outras palavras, um conjunto fuzzy do tipo 2 pode ser interpretado como um conjunto fuzzy (do tipo 1) sobre o produto Cartesiano $U \times [0,1]$.

Operações com Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

Usando a formulação alternativa, podemos definir a união, intersecção e complemento de um conjunto fuzzy do tipo 2 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}_2(U)$ caracterizados pelas funções de pertinência $\varphi_{\tilde{A}}, \varphi_{\tilde{B}} : U \times [0,1] \to [0,1]$ como segue para todo $u \in U$ e $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(u,x) &= \mathcal{C}\big(\varphi_{\tilde{A}}(u,x), \varphi_{\tilde{B}}(u,x)\big), \\
\varphi_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(u,x) &= \mathcal{D}\big(\varphi_{\tilde{A}}(u,x), \varphi_{\tilde{B}}(u,x)\big), \\
\varphi_{\tilde{A}^c}(u,x) &= \eta\big(\varphi_{\tilde{A}}(u,x)\big),
\end{aligned}$$

em que $\mathcal{C} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ é uma conjunção fuzzy, $\mathcal{D} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ é uma disjunção fuzzy e $\eta : [0,1] \to [0,1]$ é uma negação fuzzy.

Nessa nova formulação não usamos o princípio de extensão de Zadeh. Porém, ainda podemos nos deparar com dificuldades ao implementar computacionalmente essas operações.

Considerações Finais

Na aula de hoje, apresentamos o conceito de conjuntos fuzzy do tipo n que são definidos recursivamente como um conjunto fuzzy pertinência é um conjunto fuzzy do tipo $n-1$.

Apesar de serem definidos por Zadeh em 1975, conjuntos fuzzy do tipo 2 foram efetivamente aplicados somente no final dos anos 90 após os trabalhos de Mendel e colaboradores.

Nessa aula, mostramos também que um conjunto fuzzy do tipo 2 pode ser interpretado como um conjunto fuzzy (do tipo 1) no produto Cartesiano $U \times [0,1]$. Com essa interpretação, podemos definir operações com conjuntos fuzzy do tipo 2 sem recorrer ao princípio de extensão de Zadeh.

Muito grato pela atenção!