Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 11 – Conjuntos Fuzzy Intuicionista e Intervalar no Contexto de Conjuntos $\mathbb{L}$-*Fuzzy*.

Marcos Eduardo Valle

UNICAMP

Na aula anterior, apresentamos o conceito de reticulado completo.

Lembrando, um reticulado completo é um conjunto parcialmente ordenado no qual todo subconjunto admite ínfimo e supremo.

O intervalo $[0,1]$ com a ordem natural dos números reais é um reticulado completo.

Destacamos também que a família de todos os conjuntos *fuzzy* de um universo de discurso U, é um reticulado completo com a ordem induzida de $([0,1],\leq)$.

Substituindo $([0,1],\leq)$ por um reticulado completo arbitrário $(\mathbb{L},\leq_{\mathbb{L}})$, obtemos os chamados conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*.

Formalmente, um conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy* é definido como segue:

Definição 1 (Conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*)

Sejam U um universo de discurso e $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ um reticulado completo. Identificamos um conjunto $\mathbb{L}$-fuzzy A com uma função de pertinência $\varphi_A : U \to \mathbb{L}$. Denotaremos a família de todos os conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy de U por $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(U)$.

Na aula de hoje, veremos duas extensões diferentes da teoria dos conjuntos *fuzzy* podem ser tratadas de forma apropriada no contexto de conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*.

Especificamente, apresentaremos os conceitos de conjuntos fuzzy intuicionistas e conjuntos fuzzy intervalares.

Conjuntos Fuzzy Intuicionista

Conjuntos fuzzy intuicionistas generalizam a noção de conjunto fuzzy considerando, além da função de pertinência, uma função de não-pertinência. Formalmente, tem-se:

Definição 2 (Conjunto Fuzzy Intuicionista)

Um conjunto fuzzy intuicionista A em um universo de discurso U é

$$A = \{(u, \mu_A(u), \nu_A(u)) : \mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1, u \in U\}.$$

A família de todos os conjuntos fuzzy intuicionistas de U será denotada por $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}(U)$.

Note que um conjunto fuzzy intuicionista A é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : U \to [0,1]$ e uma função de não-pertinência $\nu_A : U \to [0,1]$ tais que $\mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1$, $\forall u \in U$.

Um conjunto fuzzy clássico $A \in \mathcal{F}(U)$ com função de pertinência $\varphi_A : U \to [0, 1]$ corresponde à um conjunto fuzzy intuicionista obtido considerando as seguinte funções de pertinência e não-pertinência:

$$\mu_A(u) = \varphi_A(u) \quad \text{e} \quad \nu_A(u) = 1 - \varphi_A(u), \quad \forall u \in U.$$

Nesse caso, temos $\mu_A(u) + \nu_A(u) = 1$ para todo $u \in U$. Em geral, porém, o grau de pertinência e não-pertinência de um elemento $u \in U$ num conjunto fuzzy intuicionista não precisam somar 1.

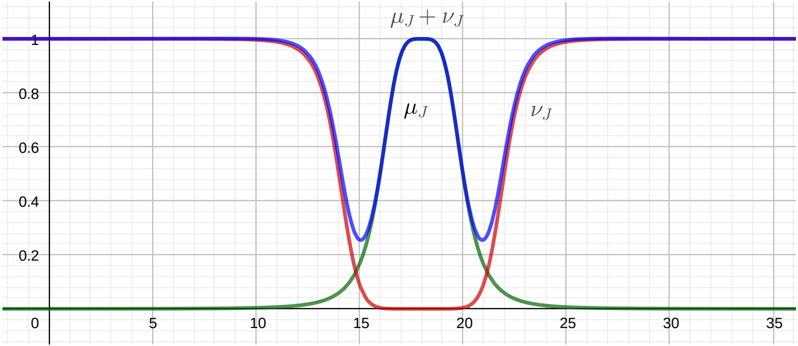
A noção de conjuntos fuzzy intuicionistas foram introduzidos em 1983 por Atanassov como uma fuzzificação da lógica intuicionista, na qual a lei do terceiro excluído (ou $u \in A$ ou $u \in A^c$) é rejeitada.

A noção de conjunto fuzzy intuicionista é também referida na literatura como conjuntos fuzzy bipolares pois eles capturam aspectos positivos e negativos da pertinência de um certo elemento.

Exemplo

O conjunto J das pessoas “jovens” pode ser descrito pelo conjunto fuzzy intuicionista cujas funções de pertinência e não-pertinência são dadas pelas expressões:

$$\mu_J(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{2}\right|^4} \quad \text{e} \quad \nu_J(x) = 1 - \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{4}\right|^8}.$$



Conjuntos Fuzzy Intuicionistas $\times$ Conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy

Um conjunto fuzzy intuicionista A é caracterizado por uma função de pertinência e não-pertinência $\mu_A, \nu_A : U \to [0,1]$ tais que $\mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1$ para todo $u \in U$.

Equivalentemente, A é caracterizado por uma função $\varphi_A : U \to \mathcal{I}$, em que

$$\mathcal{I} = \{(x, y) \in [0,1]^2 : x + y \leq 1\},$$

é um reticulado completo com a ordem parcial

$$(x_1, y_1) \leq_{\mathcal{I}} (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq x_2 \quad \text{e} \quad y_1 \geq y_2.$$

Portanto, um conjunto *fuzzy* intuicionista é um conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy* com $(\mathbb{L}, \leq) \equiv (\mathcal{I}, \leq_{\mathcal{I}})$.

Em termos práticos, dados conjuntos fuzzy intuicionistas $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}(U)$, tem-se

$$A \subseteq B \iff \mu_A(u) \leq \mu_B(u) \quad \text{e} \quad \nu_A(u) \geq \nu_B(u), \quad \forall u \in U.$$

Além disso, as funções de pertinência e não-pertinência do ínfimo e do supremo de uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos *fuzzy* intuicionistas são dado por

$$\mu_{(\bigwedge \mathcal{A})}(u) = \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \mu_A(u) \quad \text{e} \quad \nu_{(\bigwedge \mathcal{A})}(u) = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \nu_A(u), \quad \forall u \in U,$$

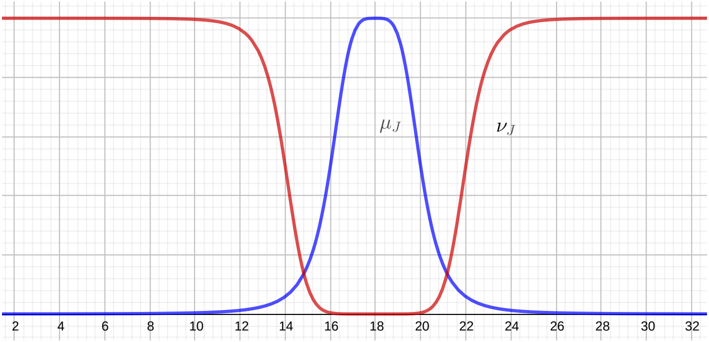
e

$$\mu_{(\bigvee \mathcal{A})}(u) = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \mu_A(u) \quad \text{e} \quad \nu_{(\bigvee \mathcal{A})}(u) = \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \nu_A(u), \quad \forall u \in U.$$

Exemplo

Considere os seguintes conjuntos *fuzzy* intuicionistas que descrevem os conceitos de "jovem" (J) e "adolescente" (A):

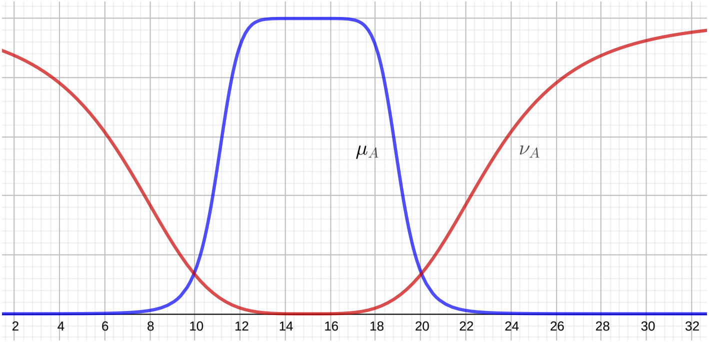
$$\mu_J(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{4}\right|^4} \quad \text{e} \quad \nu_J(x) = 1 - \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{2}\right|^4},$$



Exemplo

Considere os seguintes conjuntos *fuzzy* intuicionistas que descrevem os conceitos de “jovem” (J) e “adolescente” (A):

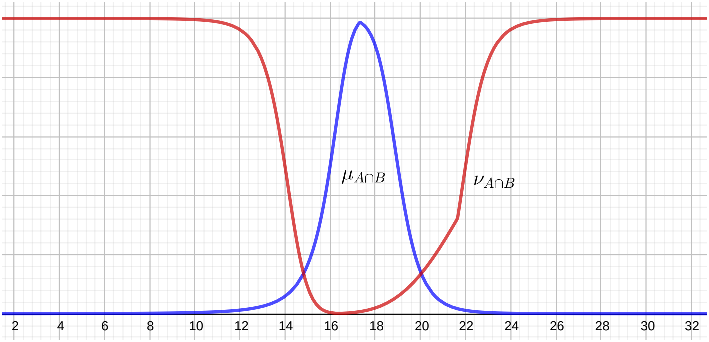
$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-15}{4}\right|^8} \quad \text{e} \quad \nu_A(x) = 1 - \frac{1}{1 + \left|\frac{x-15}{8}\right|^4}.$$



Exemplo

Considere os seguintes conjuntos *fuzzy* intuicionistas que descrevem os conceitos de "jovem" (J) e "adolescente" (A):

$$\mu_{A\cap B}(x) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-15}{4}\right|^8} \quad \text{e} \quad \nu_{A\cap B}(x) = 1 - \frac{1}{1+\left|\frac{x-15}{8}\right|^4}.$$



Conjuntos *Fuzzy* Intervalares

Em muitas situações, a opinião de especialistas podem divergir com respeito a função de pertinência apropriada para descrever um certo conjunto *fuzzy*. Nesses caso, podemos estabelecer um intervalo fechado que contempla todas as possibilidades para a pertinência de um certo elemento do universo de discurso.

Definição 3 (Conjuntos *Fuzzy* Intervalar)

Um conjunto *fuzzy* intervalar A de U é dado por

$$A = \{(u, \varphi_{A_I}(u), \varphi_{A_S}(u)) : 0 \leq \varphi_{A_I}(u) \leq \varphi_{A_S}(u) \leq 1, u \in U\}.$$

Denotaremos a família de todos os conjuntos fuzzy intervalares de U por $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}(U)$.

Equivalentemente, A é caracterizado por uma função de pertinência $\varphi_A : U \to \mathbb{I}$, em que $\mathbb{I} = \{[a_I, a_S] : 0 \leq a_I \leq a_S \leq 1\}$ denota a família de todos os sub-intervalos fechados de $[0, 1]$.

Note que a função de pertinência de um conjunto *fuzzy* associa a cada $u \in U$ um intervalo $[\varphi_{AI}(u), \varphi_{AS}(u)] \subseteq [0, 1]$.

Um conjunto *fuzzy* A (não-intervalar), caracterizado pela função de pertinência $\varphi_A : U \to [0, 1]$, é um caso particular de um conjunto *fuzzy* intervalar cuja pertinência de $u \in U$ é o intervalo fechado degenerado $[\varphi_A(u), \varphi_A(u)]$.

Alternativamente, um conjunto *fuzzy* intervalar A pode ser representado por duas funções de pertinências $\varphi_{AI}, \varphi_{AS} : U \to [0, 1]$ que satisfazem $\varphi_{AI} \leq \varphi_{AS}$, ou seja, $\varphi_{AI}(u) \leq \varphi_{AS}(u), \forall u \in U$.

Exemplo

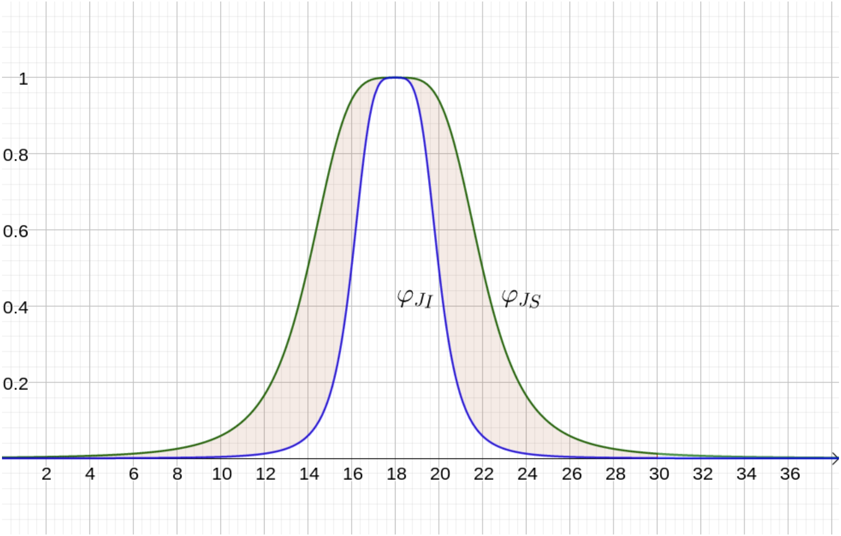
Suponha que dois especialista modelaram o conceito de jovem usando as seguintes funções de pertinência em forma de sino:

$$\varphi_{J_1}(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{2}\right|^4} \quad \text{e} \quad \varphi_{J_2}(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{4}\right|^8}.$$

Nesse caso, podemos sintetizar a descrição do conceito de jovens dos dois especialistas usando o único conjunto *fuzzy* intervalar:

$$\varphi_J(x) = \left[\frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{2}\right|^4}, \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{4}\right|^8}\right].$$

O gráfico abaixo apresenta o conjunto fuzzy intervalar dos “jovens”:



Reticulado Completo dos Intervalos

Um conjunto *fuzzy* intervalar é um exemplo de um conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy*.

Com efeito, considere a seguinte ordem parcial na família

$$\mathbb{I} = \{a = [a_I, a_S] \subseteq [0,1]\},$$

de todos os sub-intervalos fechados do intervalo $[0,1]$:

$$a \leq_{\mathbb{I}} b \quad \Longleftrightarrow \quad a_I \leq b_I \quad \text{e} \quad a_S \leq b_S.$$

O conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{I}, \leq_{\mathbb{I}})$ é um reticulado completo.

Por exemplo, o ínfimo de uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos *fuzzy* intervalares é dado por

$$\varphi_{(\bigwedge \mathcal{A})}(u) = \left[\bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \varphi_{AI}(u), \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \varphi_{AS}(u) \right], \quad \forall u \in U.$$

Exemplo

Considere os seguintes conjuntos *fuzzy* intervalares que descrevem os conceitos de "jovem" (J) e "adolescente" (A):

$$\varphi_J(x) = \left[\frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{4}\right|^4}, \frac{1}{1 + \left|\frac{x-18}{2}\right|^4} \right],$$

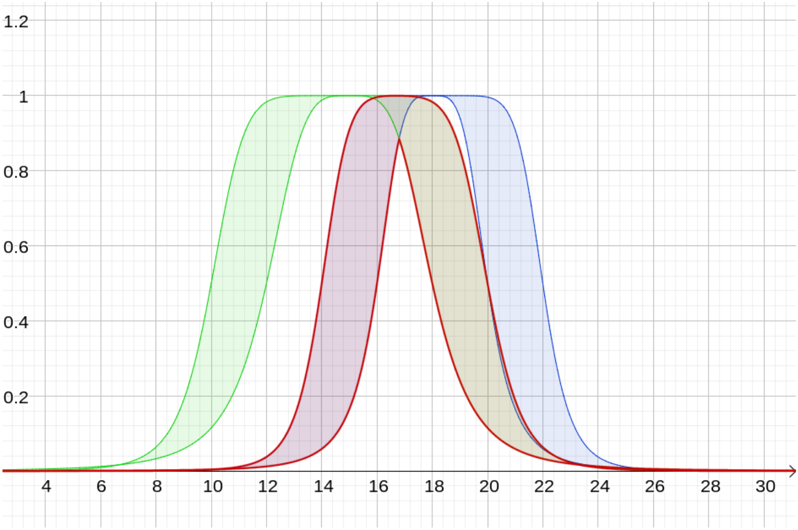
e

$$\varphi_A(x) = \left[\frac{1}{1 + \left|\frac{x-15}{4}\right|^4}, \frac{1}{1 + \left|\frac{x-15}{2}\right|^2} \right].$$

A união dos conjuntos fuzzy intervalares J e A pode ser descrita pelo supremo das funções de pertinência φ_J e φ_A.

Dualmente, a intersecção dos dois conceitos (jovem e adolescente) é caracterizado o ínfimo das funções de pertinências φ_J e φ_A.

O gráfico do ínfimo (vermelho) dos conjuntos fuzzy intervalares “jovem” (azul) e “adolescente” (verde):



Isomorfismo de Reticulados

Definição 4 (Isomorfismo de Reticulados)

Sejam $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ reticulados. Uma aplicação $\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ é um isomorfismo de reticulado se ψ é uma bijeção tal que ψ e sua inversa ψ^{-1} preservam ordem, ou seja,

$$x \leq_{\mathbb{L}} y \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(x) \leq_{\mathbb{M}} \psi(y),$$

para $x, y \in \mathbb{L}$. Se $\mathbb{L} = \mathbb{M}$, então dizemos que ψ é um automorfismo.

Dizemos que dois reticulados $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ são isomórficos se existe um isomorfismo entre eles.

Por exemplo, o conjunto dos reais estendidos $\bar{\mathbb{R}}$ e o intervalo fechado $[0, 1]$, ambos com a ordem usual, são isomórficos. Basta considerar a função $\psi(x) = 1/(1 + e^x)$.

Conjuntos Fuzzy Intervalares $\times$ Intuicionistas

O seguinte teorema mostra que os reticulados completos $(\mathcal{I}, \leq_{\mathcal{I}})$ e $(\mathbb{I}, \leq_{\mathbb{I}})$ são isomórficos:

Teorema 5

A aplicação $\psi : \mathcal{I} \to \mathbb{I}$ dada por

$$\psi(x, y) = [x, 1 - y],$$

é um isomorfismo de reticulados.

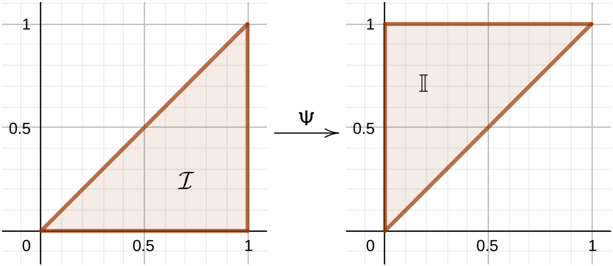
Embora conceitualmente diferentes, o Teorema 5 mostra que a família dos conjuntos fuzzy intervalares e a família dos conjuntos fuzzy intuicionistas são isomórficos.

Demonstração do Teorema 5

Primeiramente, lembre-se que $\mathcal{I} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\}$.
Além disso, podemos identificar

$$\mathbb{I} = \{[a_I, a_S] \subseteq [0, 1]\} \equiv \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Assim, geometricamente, temos Ψ faz a seguinte transformação:



Evidentemente, Ψ é uma bijeção!

Vamos mostrar que Ψ preserva ordem.

Considere $(x_1, y_1) \in \mathcal{I}$ e $(x_2, y_2) \in \mathcal{I}$. Da definição de $\Psi : \mathcal{I} \to \mathbb{I}$ e das ordens parciais $\leq_{\mathcal{I}}$ e $\leq_{\mathbb{I}}$, concluímos que:

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) \leq_{\mathcal{I}} (x_2, y_2) \quad & \iff \quad x_1 \leq x_2 \quad \text{e} \quad y_1 \geq y_2 \\
& \iff \quad x_1 \leq x_2 \quad \text{e} \quad 1 - y_1 \leq 1 - y_2 \\
& \iff \quad [x_1, 1 - y_1] \leq_{\mathbb{I}} [x_2, 1 - y_2] \\
& \iff \quad \Psi(x_1, y_1) \quad \text{e} \quad \Psi(x_2, y_2).
\end{aligned}
$$

Portanto, Ψ preserva a ordem dos reticulados $\mathcal{I}$ e $\mathbb{I}$.

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de conjuntos fuzzy intuicionistas e intervalares, ambos como conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy.

Um conjunto fuzzy intuicionista, também chamado conjunto fuzzy bipolar, é caracterizado por uma função de pertinência e uma função de não-pertinência.

Um conjunto fuzzy intervalar é caracterizado por uma função que associa a cada elemento um intervalo que presenta sua pertinência.

Concluímos a aula mostrando que, embora conceitualmente diferentes, conjuntos fuzzy intuicionistas e intervalares são isomórficos.

Muito grato pela atenção!