Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 10 – Reticulado Completo e Conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*.

Marcos Eduardo Valle

Introdução

Na aula de hoje apresentaremos a noção de conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*, que generalizam a noção de conjuntos *fuzzy* usando o conceito de reticulado completo.

Um reticulado completo é uma estrutura matemática na qual a teoria dos conjuntos *fuzzy* pode ser muito bem desenvolvida.

Para apresentar o conceito de reticulado completo, iniciaremos revisando relações de ordem e conjuntos parcialmente ordenados.

Relação Clássica

Definição 1 (Relação Clássica)

Uma relação $\mathcal{R}$ entre conjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ é um subconjunto do produto Cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, ou seja,

$$\mathcal{R} \subseteq U_1 \times \ldots \times U_n.$$

A n-upla $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathcal{R}$ se, e somente se, os elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ estão relacionados, ou seja, existe uma associação, interação ou interconexão entre esses elementos.

Exemplo

Considere os conjuntos

$$X = \{\text{Brasil}, \text{Portugal}, \text{França}, \text{Estados Unidos}, \text{Canadá}\},$$

$$Y = \{\text{Português}, \text{Francês}, \text{Inglês}\},$$

e

$$Z = \{\text{Real}, \text{Dólar}, \text{Euro}\}.$$

Determine a relação $\mathcal{R}$ que associa o país com a língua e a moeda.

Exemplo

Considere os conjuntos

$$X = \{\text{Brasil}, \text{Portugal}, \text{França}, \text{Estados Unidos}, \text{Canadá}\},$$

$$Y = \{\text{Português}, \text{Francês}, \text{Inglês}\},$$

e

$$Z = \{\text{Real}, \text{Dólar}, \text{Euro}\}.$$

Determine a relação $\mathcal{R}$ que associa o país com a língua e a moeda.

Resposta: A relação é

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{l} \text{(Brasil,Português,Real)}, \text{(Portugal,Português,Euro)}, \\ \text{(França,Francês,Euro)}, \text{(Estados Unidos,Inglês,Dólar)}, \\ \text{(Canadá,Inglês,Dólar)}, \text{(Canadá,Francês,Dólar)} \end{array} \right\}.$$

Note que (Brasil,Inglês, Dólar) não pertence à $\mathcal{R}$. Logo, inglês não é a língua franca ou o dólar não é a unidade monetária do Brasil.

Relação Binária

Uma relação $\mathcal{R}$ definida no produto Cartesiano $U \times V$ de dois conjuntos é chamada **relação binária**.

Se um par ordenado (u, v) pertence a relação $\mathcal{R} \subseteq U \times V$, diremos que u está relacionado com v pela relação $\mathcal{R}$ e, muitas vezes, denotaremos por $u\mathcal{R}v$.

Se um par ordenado (u, v) não pertence a relação $\mathcal{R}$, diremos que u não está relacionado com v pela relação $\mathcal{R}$ e escrevemos $u\not\mathcal{R}v$.

Exemplo

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s). Um estudo de interesse é o processo de predação, isto é, a relação **presa-predador**.

Em termos matemáticos, sejam $U = \{a, c, i, l, s\}$ e $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ tal que $(u, v) \in \mathcal{R}$ se u é presa de v. A relação $\mathcal{R}$ pode ser representada pela tabela:

		predador				
	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
presa	a	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
	c	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
	i	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
	l	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$
	s	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$

Exemplo

Considere um ecossistema U, no qual interagem as populações de **águias** (a), **cobras** (c), **insetos** (i), **lebres** (l) e **sapos** (s). Um estudo de interesse é o processo de predação, isto é, a relação **presa-predador**.

Em termos matemáticos, sejam $U = \{a, c, i, l, s\}$ e $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ tal que $(u, v) \in \mathcal{R}$ se u é presa de v. A relação $\mathcal{R}$ pode ser representada pela tabela:

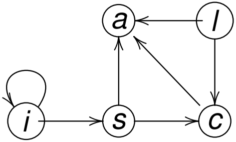
predador

	$\mathcal{R}$	a	c	i	l	s
	a	0	0	0	0	0
	c	1	0	0	0	0
presa	i	0	0	1	0	1
	l	1	1	0	0	0
	s	1	1	0	0	0

Grafos e Relações Binárias

Podemos representar uma relação $\mathcal{R} \subseteq U \times U$ por um grafo orientado (dígrafo) $\mathcal{G}(U, \mathcal{R})$ quando $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto finito. Note que U é o conjunto dos vértices do dígrafo e as arestas são determinadas pela relação $\mathcal{R}$, ou seja, existe uma aresta ligando u e v se $(u, v) \in \mathcal{R}$.

Por exemplo, a relação presa-predador do exemplo anterior pode ser representada pelo seguinte dígrafo:



Relação de Ordem

Definição 2 (Ordem Parcial)

Dado um conjunto não-vazio U, uma relação binária $\leq$ é uma *ordem parcial* se:

- $u \leq u$, (Reflexividade)
- $u \leq v$ e $v \leq u$ implica $u = v$, (Anti-simetria)
- $u \leq v$ e $v \leq w$ implica $u \leq w$, (Transitividade)

para $u, v, w \in U$. Um conjunto equipado com uma ordem parcial é chamado **conjunto parcialmente ordenado** e denotado por $(U, \leq)$.

Dizemos que $(U, \leq)$ é totalmente ordenado se

- Para todo $u, v \in U$, ou $u \leq v$ ou $v \leq u$ é verdadeira.

Um conjunto totalmente ordenado é chamado **corrente** ou **cadeia**.

Exemplos

1. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o intervalo $[0, 1]$, equipados com a ordem usual $\leq$, são correntes.
2. Dado um conjunto U, o conjunto das partes $\mathcal{P}(U)$ equipado com a relação de inclusão $\subseteq$, isto é, $A \leq B$ se e somente se $A \subseteq B$, é um conjunto parcialmente ordenado.
3. Considere o conjunto $\mathbb{N}$ dos números inteiros não-negativos e defina $m \leq n$ se e somente se m divide n. Nesse caso, $\mathbb{N}$ é um conjunto parcialmente ordenado.
4. A relação presa-predador não é uma relação de ordem, pois não satisfaz a transitividade.

Princípio da Dualidade

Se $\leq$ é uma ordem parcial em U, então a relação $\leq'$ dada por

$$u \leq' v \quad \Longleftrightarrow \quad v \leq u,$$

é também uma ordem parcial em U, chamada de **ordem dual**.

Exemplo 3

O dual da ordem natural $\leq$ ("menor ou igual") dos números reais é a ordem $\geq$ ("maior ou igual").

Note que $(\leq')'$ corresponde a $\leq$.

Princípio da Dualidade

Toda definição, propriedade, teorema ou afirmação em $(U, \leq)$ resulta uma definição, propriedade, teorema ou afirmação em $(U, \leq')$ obtida substituindo $\leq$ por $\leq'$.

Maior e Menor Elementos

Considere um conjunto parcialmente ordenado $(U, \leq)$ e um subconjunto $X \subseteq U$.

- Um elemento $a \in X$ é chamado **menor elemento de** X se $a \leq x$ para todo $x \in X$.
- Analogamente, $b \in X$ é o **maior elemento de** X se $x \leq b$, $\forall x \in X$.

O maior e o menor elementos de X, quando existem, são únicos. Com efeito, se a e a' são ambos menores elementos de X, então valem $a \leq a'$ e $a' \leq a$. Pela anti-simetria da ordem parcial, temos que $a = a'$.

Cotas Superior e Inferior

Seja $(U, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $X \subseteq U$.

- Um elemento $a \in U$ é uma cota inferior de X se $a \leq x$ para todo $x \in X$.
- Analogamente, $b \in U$ é uma cota superior de X se $x \leq b$ para todo $x \in X$.

Note que o menor e o maior elemento de X, quando existem, são respectivamente uma cota inferior e uma cota superior.

Ínfimo e Supremo

- Se o conjunto $A = \{a \in U : a \leq x, x \in X\}$ de todas as cotas inferiores de X possui um maior elemento $a_0 \in U$, então ele é chamado **ínfimo** de X. Note que o ínfimo a_0 de X satisfaz:
  - $a_0 \leq x$ para todo $x \in X$;
  - $a \leq a_0$ para toda cota inferior a de X.

- Dualmente, se o conjunto $B = \{b \in U : x \leq b, x \in X\}$ de todas as cotas superiores de X possui um maior elemento $b_0 \in U$, então ele é chamado **supremo** de X. Note que o supremo b_0 de X satisfaz:
  - $x \leq b_0$ para todo $x \in X$;
  - $b_0 \leq b$ para toda cota superior b de X.

Notação

O ínfimo e o supremo de um conjunto X, quando existem, são únicos.

- Denotados o ínfimo de X por $\inf X$ ou $\bigwedge X$.
- Denotamos o supremo de X por $\sup X$ ou $\bigvee X$.

O ínfimo e o supremo de um conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq U$ serão denotado respectivamente por:

$$\bigwedge X \equiv x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \equiv \bigwedge_{j=1}^{n} x_j,$$

e

$$\bigvee X \equiv x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \equiv \bigvee_{j=1}^{n} x_j.$$

Reticulado e Reticulado Completo

Definição 4 (Reticulado e Reticulado Completo)

Um conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{L}, \leq)$ é um reticulado se quaisquer dois elementos $x, y \in \mathbb{L}$ possui ínfimo e supremo, isto é, $x \wedge y$ e $x \vee y$ estão bem definidos em $\mathbb{L}$.

Dizemos que $(\mathbb{L}, \leq)$ é um reticulado completo se todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{L}$, finito ou infinito, admite ínfimo e supremo em $\mathbb{L}$.

Note que um reticulado completo $\mathbb{L}$ possui um maior e um menor elemento, denotados respectivamente por

$$\bot = \bigwedge \mathbb{L} \quad \text{e} \quad \top = \bigvee \mathbb{L}.$$

Note também que, se $\mathbb{L}$ é um reticulado completo, então

$$\bigwedge \emptyset = \top \quad \text{e} \quad \bigvee \emptyset = \bot.$$

Exemplos

- Toda corrente é um reticulado pois ou $x \leq y$ ou $y \leq x$. Por um lado, se $x \leq y$, então $x \wedge y = x$ e $x \vee y = y$. Por outro lado, se $y \leq x$, então $x \wedge y = y$ e $x \vee y = x$.
- Nem todo reticulado é completo. Por exemplo, o intervalo aberto $\mathbb{L} = (0, 1)$ com a ordem usual é um reticulado mas não é um reticulado completo pois o conjunto $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ não possui ínfimo.
- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um reticulado mas não é completo pois não possui maior e menor elemento.
- O conjunto das partes de U, denotado por $\mathcal{P}(U)$, com a relação de inclusão é um reticulado completo. Nesse caso, o ínfimo e o supremo correspondem respectivamente à intersecção e a união.

Intervalo $[0, 1]$ e o Conjuntos dos Reais Estendidos

O intervalo $[0, 1]$ com a ordem usual é um reticulado completo.

O conjunto dos reais estendidos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, obtido adicionando aos reais os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, é um reticulado completo com a ordem natural dos números reais com a condição

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Produto Cartesiano e a Ordem Induzida

Considere reticulados completos $(\mathbb{L}_1, \leq_1), \ldots, (\mathbb{L}_n, \leq_n)$.
O produto Cartesiano $U = \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_2 \times \ldots \times \mathbb{L}_n$ é um reticulado completo com a ordem induzida definida como segue:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n) \iff x_i \leq_i y_i, \forall i = 1, \ldots, n.$$

O supremo e o ínfimo de um conjunto $X \subseteq \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_n$ são obtidos calculando o supremo e o ínfimo em cada componente.

Exemplo 5

Considere $X = \{(0.4, 0.2), (0.7, 0.0), (0.9, 0.8), (0.3, 0.8)\} \subseteq [0, 1]^2$, em que $[0, 1]^2$ é o reticulado equipado com ordem induzida da ordem natural do intervalo $[0, 1]$. Nesse caso,

$$\bigwedge X = (0.3, 0.0) \quad \text{e} \quad \bigvee X = (0.9, 0.8).$$

Funções com a Ordem Induzida

Considere um reticulado completo $(\mathbb{L}, \leq)$. O conjunto $\text{Fun}(U, \mathbb{L})$ de todas as funções $f : U \to \mathbb{L}$, também denotado por $\mathbb{L}^U$, é um reticulado completo com a ordem induzida definida como segue:

$$f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad f(u) \leq g(u), \forall u \in U.$$

O ínfimo e o supremo de uma família de funções $F = \{f_i : U \to \mathbb{L} : i \in I\}$, onde I denota um conjunto de índices, são dados por

$$\left(\bigwedge F\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} f_i(x) \quad \text{e} \quad \left(\bigvee F\right)(x) = \bigvee_{i \in I} f_i(x),$$

para todo $x \in U$.

Exemplos

Considere funções $f_1, f_2, f_3 : [0,1] \to [0,1]$ dadas pelas equações:

$$f_1(x) = \texttt{bell}(x; 0.2, 2, 0.15),$$
$$f_2(x) = \texttt{bell}(x; 0.3, 4, 0.5),$$
$$f_3(x) = \texttt{bell}(x; 0.2, 2, 0.9),$$

em que

$$\texttt{bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}.$$

Defina a família de funções $F = \{f_1, f_2, f_3\}$. Usando a ordem induzida do reticulado completo $([0,1], \leq)$, encontramos

$$\begin{aligned}\left(\bigwedge F\right)(x) &= f_1(x) \wedge f_2(x) \wedge f_3(x) \\ &= \left(\frac{1}{1 + \left|\frac{x-0.15}{0.2}\right|^4}\right) \wedge \left(\frac{1}{1 + \left|\frac{x-0.5}{0.3}\right|^8}\right) \wedge \left(\frac{1}{1 + \left|\frac{x-0.9}{0.2}\right|^4}\right).\end{aligned}$$

Dualmente, para todo $x \in [0,1]$, temos

$$\left(\bigvee F\right)(x) = f_1(x) \vee f_2(x) \vee f_3(x)$$
$$= \left(\frac{1}{1+\left|\frac{x-0.15}{0.2}\right|^4}\right) \vee \left(\frac{1}{1+\left|\frac{x-0.5}{0.3}\right|^8}\right) \vee \left(\frac{1}{1+\left|\frac{x-0.9}{0.2}\right|^4}\right).$$

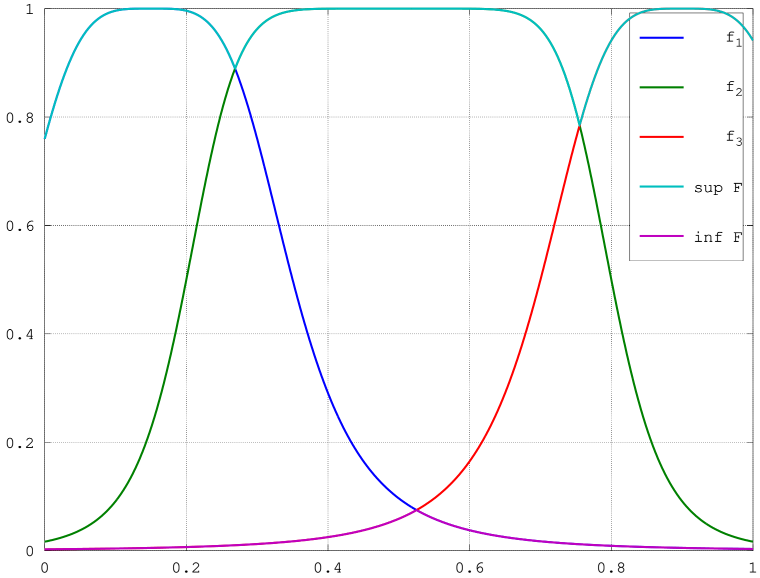
Em particular, se $x = 0.3$, obtemos

$$\left(\bigwedge F\right)(0.3) = f_1(x) \wedge f_2(x) \wedge f_3(x) = 0.76 \wedge 0.96 \wedge 0.01 = 0.01.$$

e

$$\left(\bigvee F\right)(0.3) = f_1(x) \vee f_2(x) \vee f_3(x) = 0.76 \vee 0.96 \vee 0.01 = 0.96.$$

Visualmente, temos o seguinte gráfico:



Conjuntos *Fuzzy* e Reticulados Completos

Vimos que o conjunto de todas as funções $\text{Fun}(U, [0, 1])$ é um reticulado completo com a ordem induzida de $([0, 1], \leq)$.

Identificando um conjunto *fuzzy* A com sua função de pertinência $\varphi_A : U \rightarrow [0, 1]$, concluímos que a família de todos os conjuntos *fuzzy* de um universo de discurso U, denotado por $\mathcal{F}(U)$, é um reticulado completo.

Essa observação é consistente com os seguintes fatos:

- O conjuntos das partes de U está contido na família de todos os conjuntos *fuzzy* de U,
- O conjunto das partes de U é um reticulado completo com a relação usual de inclusão. Além disso, a intersecção e a união correspondem respectivamente ao ínfimo e ao supremo de uma família de conjuntos clássicos.

Conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*

De uma forma mais geral, substituindo $([0,1],\leq)$ por um reticulado completo arbitrário obtemos a seguinte definição (Goguen, 1967):

Definição 6 (Conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*)

Sejam U um universo de discurso e $(\mathbb{L},\leq_{\mathbb{L}})$ um reticulado completo. Identificamos um conjunto $\mathbb{L}$-fuzzy A com uma função de pertinência $\varphi_A : U \to \mathbb{L}$. Denotaremos a família de todos os conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy de U por $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(U)$.

A relação de inclusão de conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy* é definida como segue:

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_A(u) \leq_{\mathbb{L}} \varphi_B(u), \forall u \in U.$$

Note que $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(U)$ é um reticulado completo. O ínfimo e o supremo de uma família de conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(U)$ são dados por

$$\varphi_{(\bigwedge \mathcal{A})}(u) = \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \varphi_A(u) \quad \text{e} \quad \varphi_{(\bigvee \mathcal{A})}(u) = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \varphi_A(u), \quad \forall u \in U.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o conceito de reticulado completo.

Um reticulado completo é um conjunto parcialmente ordenado no qual todo subconjunto admite ínfimo e supremo.

A família de todos os conjuntos *fuzzy* de um universo de discurso U, é um reticulado completo com a ordem induzida de $([0,1],\leq)$.

Substituindo $([0,1],\leq)$ por um reticulado completo arbitrário $(\mathbb{L},\leq_{\mathbb{L}})$, obtemos os chamados conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy*.

Na próxima aula, discutiremos como os conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy* podem ser usados para modelar incertezas na teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Muito grato pela atenção!