Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 09 – Ajuste de um Modelo de Takagi-Sugeno Usando Quadrados Mínimos.

UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Na aula anterior, apresentamos o método de inferência de Takagi-Sugeno para sistemas baseados em regras *fuzzy*.

Simplificadamente, num modelo de Takagi-Sugeno os antecedentes são conjuntos *fuzzy* mas os consequentes são funções das variáveis independentes.

Na aula de hoje, veremos como podemos ajustar as funções do consequente de um modelo de Takagi-Sugeno usando o método dos quadrados mínimos.

Especificamente, veremos como um conjunto de dados numéricos pode ser usado para determinar os parâmetros dos consequentes de um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem.

Modelo de Takagi-Sugeno

Regras Fuzzy de Takagi-Sugeno

No modelo de Takagi-Sugeno, as regras são da forma:

$$\text{SE } x_1 \text{ é } A_{1i} \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } x_n \text{ é } A_{ni}, \text{ ENTÃO } y = f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

em que $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{ni}$ são conjuntos *fuzzy* dos antecedentes enquanto que o consequente é uma função $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Equivalentemente, podemos escrever a base de regras como

$$\text{SE } \mathbf{x} \text{ é } A_i \text{ ENTÃO } y = f_i(\mathbf{x}), \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ e $A_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \ldots, k$.

Inferência de Takagi-Sugeno

Dada uma entrada $\mathbf{x}$, a saída do modelo de Takagi-Sugeno é

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{k} w_i},$$

em que

$$w_i = A_i(\mathbf{x}) = \varphi_{A_{1i}}(x_1) \vartriangle \varphi_{A_{2i}}(x_2) \vartriangle \ldots \vartriangle \varphi_{A_{ni}}(x_n), \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

representam as ativações de cada regra *fuzzy*.

Equivalentemente, podemos escrever

$$y = \sum_{i=1}^{k} \bar{w}_i f_i(\mathbf{x}), \quad \text{em que} \quad \bar{w}_i = \frac{w_i}{\sum_{l=1}^{k} w_l},$$

são as ativações normalizadas.

Takagi-Sugeno de Primeira Ordem

Considere um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem, ou seja, as funções $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são polinômios de primeira ordem:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i,$$

para todo $i = 1, \ldots, k$.

Usando as ativações normalizadas, a saída y de um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem é

$$y = \sum_{i=1}^{k} \bar{w}_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_i a_{ij} x_j + \bar{w}_i b_i.$$

Note que a saída y é linear nos parâmetros a_{ij}'s e b_i's.

Suponha que temos os conjuntos *fuzzy* $A_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, k$ dos antecedentes de um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem.

Formulando como um problema de quadrados mínimos, podemos determinar os parâmetros a_{ij} e b_i usando um conjunto de dados

$$\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}^\xi, d_\xi) : \xi = 1, \ldots, m\}$$

chamado **conjunto de treinamento**, em que d_ξ representa a resposta desejada após a observação de $\mathbf{x}_\xi$, para $\xi = 1, \ldots, m$.

Especificamente, os parâmetros podem ser obtidos resolvendo o problema de quadrados mínimos

$$\mathbf{M}\alpha \approx \mathbf{d},$$

em que:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^1 x_1^1 & \bar{w}_1^1 x_2^1 & \dots & \bar{w}_1^1 x_n^1 & \bar{w}_1^1 & \dots & \bar{w}_k^1 x_1^1 & \dots & \bar{w}_k^1 x_n^1 & \bar{w}_k^1 \\ \bar{w}_1^2 x_1^2 & \bar{w}_1^2 x_2^2 & \dots & \bar{w}_1^2 x_n^2 & \bar{w}_1^2 & \dots & \bar{w}_k^2 x_1^2 & \dots & \bar{w}_k^2 x_n^1 & \bar{w}_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{w}_1^m x_1^m & \bar{w}_1^m x_2^m & \dots & \bar{w}_1^m x_n^m & \bar{w}_1^m & \dots & \bar{w}_k^m x_1^m & \dots & \bar{w}_k^m x_n^m & \bar{w}_k^m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)k}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \\ b_k \end{bmatrix}_{(n+1)k \times 1} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}_{m \times 1}^T .$$

Lembre-se que, num problema de quadrados mínimos $\mathbf{M}\mathbf{x} \approx \mathbf{d}$, a solução α é obtida resolvendo o problema

$$\arg\min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\mathbf{d} - \mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}\|_2^2.$$

Em outras palavras, os parâmetros a_{ij}'s e b_i's minimizam a soma dos erros quadráticos

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\xi=1}^{m} (y_\xi - d_\xi)^2,$$

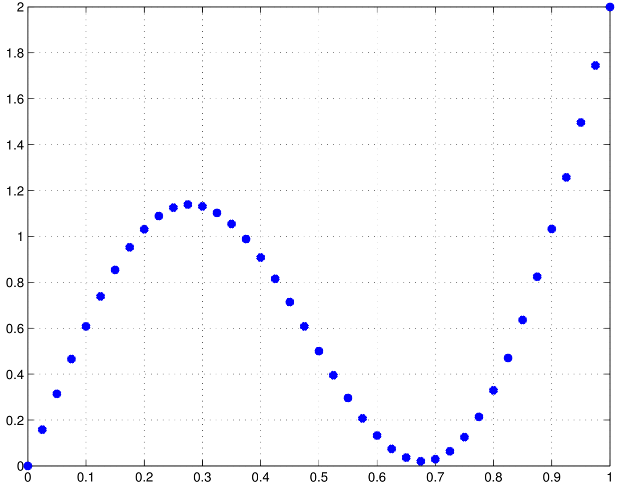
em que y_ξ é a saída do modelo de Takagi-Sugeno após a apresentação de $\mathbf{x}^\xi$.

No `MATLAB` e no `GNU Octave`, a solução do problema de quadrados mínimos $\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha} \approx \mathbf{d}$ é obtida através do comando:

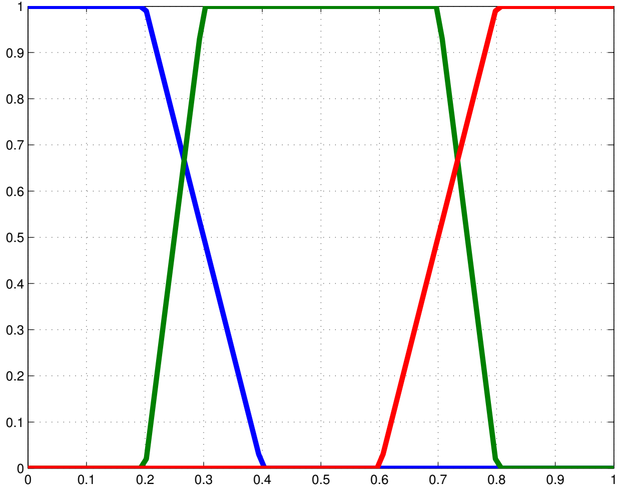
```
» alpha = M\d;
```

Exemplo – 1

Considere o conjunto de treinamento mostrado abaixo:



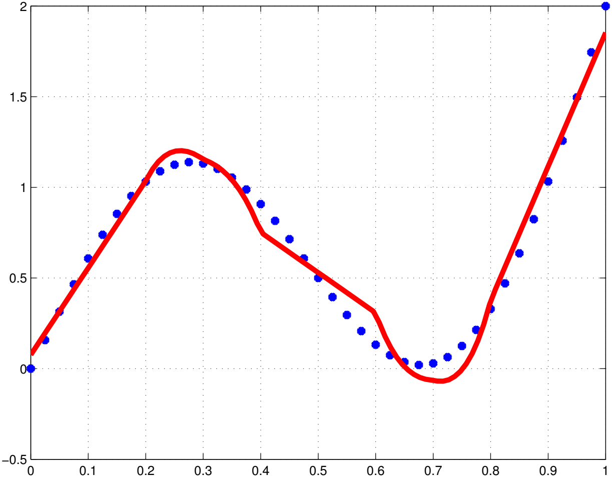
Definimos as funções de pertinência:



Usando a metodologia descrita anteriormente, encontramos o modelo de Takagi-Sugeno:

$$
\begin{aligned}
&\text{SE } x \text{ é } A_1 \text{ ENTÃO } y = 4.79x + 0.08,\\
&\text{SE } x \text{ é } A_2 \text{ ENTÃO } y = -2.22x + 1.64,\\
&\text{SE } x \text{ é } A_3 \text{ ENTÃO } y = 7.38x - 5.53.
\end{aligned}
$$

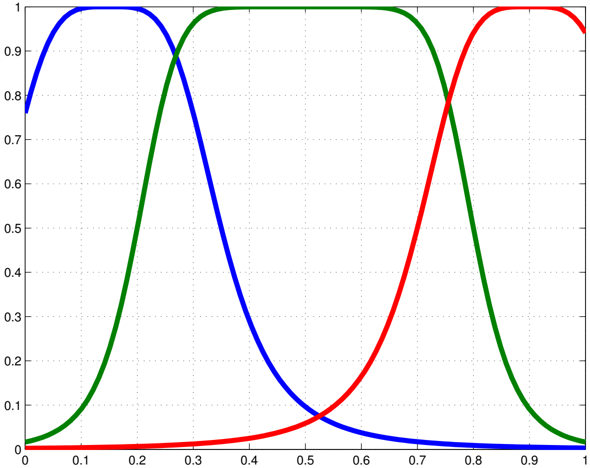
Abaixo o modelo de Takagi-Sugeno com o conjunto de treinamento:



Pode-se observar as retas definidas por cada regra *fuzzy*.

Exemplo – 2

Considere o mesmo conjunto de treinamento mas as funções de pertinência



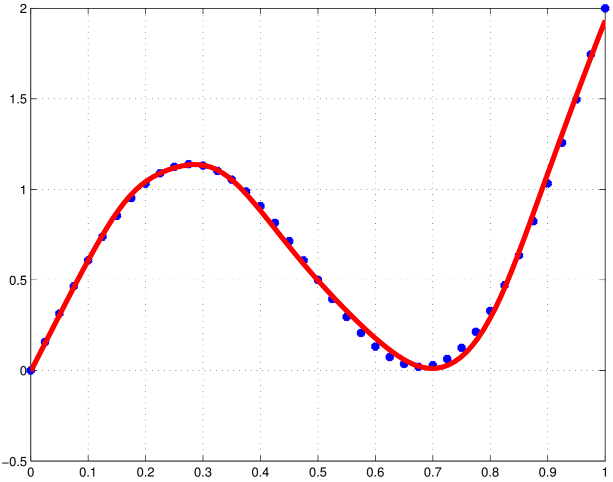
Neste caso, a metodologia descrita anteriormente fornece o modelo Takagi-Sugeno:

$$\begin{aligned}
&\text{SE } x \text{ é } \texttt{bell}(\cdot, 0.2, 2, 0.15) \text{ ENTÃO } y = 6.11x - 0.01,\\
&\text{SE } x \text{ é } \texttt{bell}(\cdot, 0.3, 4, 0.5) \text{ ENTÃO } y = -1.25x + 1.02,\\
&\text{SE } x \text{ é } \texttt{bell}(\cdot, 0.2, 2, 0.9) \text{ ENTÃO } y = 7.84x - 5.89.
\end{aligned}$$

em que

$$\texttt{bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x - c_i}{a_i}\right|^{2b_i}}.$$

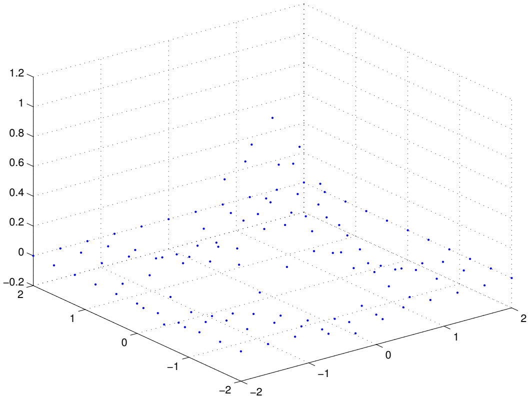
Abaixo o modelo de Takagi-Sugeno com o conjunto de treinamento:



Observe que nesse caso encontramos uma função mais suave que ajusta-se melhor ao conjunto de dados.

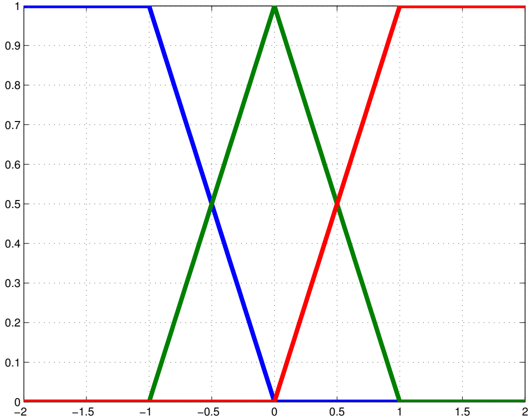
Exemplo – 3

Considere o conjunto de treinamento



que foram extraídos da função $s(x, y) = \frac{sen(x)}{x} \frac{\text{sen}(y)}{y}$, para pontos (x, y) distribuídos numa malha com 11×11 pontos.

Considere os conjuntos *fuzzy* abaixo para ambas variáveis x e y:

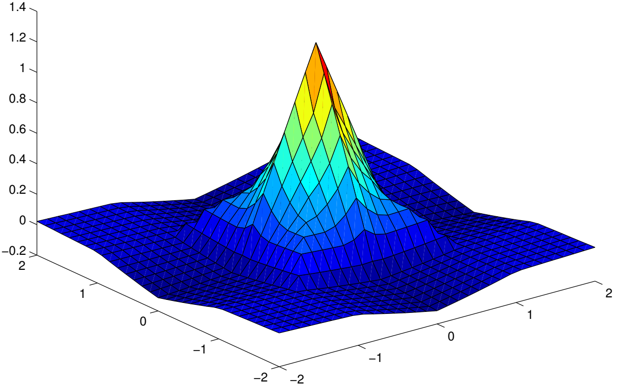


Usando a metodologia apresentada anteriormente, construímos um modelo de Takagi-Sugeno da forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_1 \text{ ENTÃO } y = -0.02x - 0.02y - 0.05,\\
&\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_2 \text{ ENTÃO } y = 0.04x - 0.04,\\
&\vdots\\
&\text{SE } x \text{ é } A_3 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_3 \text{ ENTÃO } y = 0.02x + 0.02y - 0.05,
\end{aligned}
$$

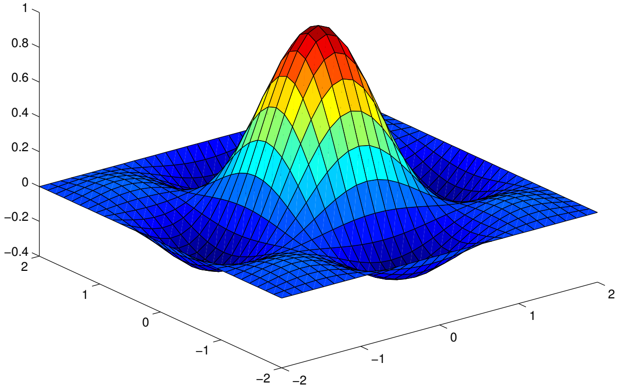
em que o conectivo "**e**" foi modelado usando o *mínimo*.

Abaixo a superfície obtida usando o modelo de Takagi-Sugeno



Note que o modelo de Takagi-Sugeno apresenta um pico em $(0, 0)$.
Além disso, diversas regiões são planas.

Abaixo a superfície da função s cujos dados foram amostrados:



Considere o mesmo conjunto de dados mas os conjuntos *fuzzy* abaixo foram usados para descrever ambas variáveis x e y:

As funções de pertinência são dadas respectivamente por:

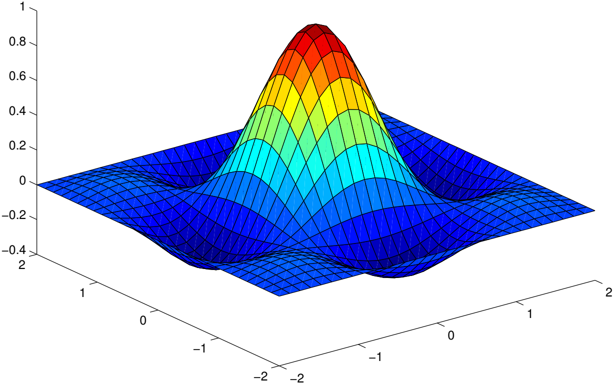
$$\texttt{bell}(\cdot; 1, 2, -1.5), \quad \texttt{bell}(\cdot, 1, 2, 0) \quad \text{e} \quad \texttt{bell}(\cdot; 1, 2, 1.5).$$

Usando a mesma metodologia, construímos o seguinte modelo de Takagi-Sugeno:

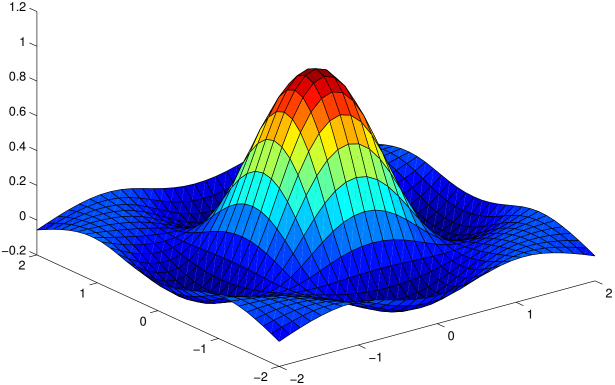
$$
\begin{aligned}
&\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_1 \text{ ENTÃO } y = -0.28x + 0.28y + 1.08,\\
&\text{SE } x \text{ é } A_1 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_2 \text{ ENTÃO } y = -1.04x - 2.42,\\
&\vdots\\
&\text{SE } x \text{ é } A_3 \ \ \textbf{e} \ \ y \text{ é } A_3 \text{ ENTÃO } y = -0.28x - 0.28y - 1.08,
\end{aligned}
$$

em que o conectivo “**e**” foi modelado usando o *produto*.

Abaixo a superfície da função *s* cujos dados foram amostrados:



Abaixo a superfície obtida usando o modelo de Takagi-Sugeno



Note que esse modelo de Takagi-Sugeno apresentou resultados visualmente melhores que o modelo anterior usando funções trapezoidais e o mínimo com t-norma.

A tabela abaixo compara os dois modelos de Takagi-Sugeno considerando diferentes medidas de erro:

	REQM	EAM	EM
Trapézio + Mínimo	6.5082e-02	4.6444e-02	2.9241e-04
Sino + Produto	2.1660e-02	1.7719e-02	5.9285e-05

Aqui,

$$REQM = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}(\phi(x_j, y_j) - s(x_j, y_j))^2},$$

$$EAM = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}|\phi(x_j, y_j) - s(x_j, y_j)|,$$

$$EM = \max_{j=1:N}\{|\phi(x_j, y_j) - s(x_j, y_j)|\},$$

em que s e ϕ denotam a função original e o modelo de Takagi-Sugeno. Os pontos (x_j, y_j), para $j = 1, \ldots, N$, foram os mesmos usados para determinar os modelos.

Considerações Finais

Na aula de hoje vimos que o método dos quadrados mínimos pode ser usado para determinar o consequente de um modelo de Takagi-Sugeno de primeira ordem com base num conjunto de dados.

A mesma metodologia pode ser usada para determinar os parâmetros do consequente de um modelo de Takagi-Sugeno de ordem superior (mas baseado em polinômios).

Vimos também que as funções de pertinência na forma de sino, combinadas com a t-norma do produto, apresentam resultados mais suaves que as funções trapezoidais ou triangulares com o mínimo.

Muito grato pela atenção!