

Conjuntos e Lógica *Fuzzy*

Aula 08 – Método de Inferência de Takagi-Sugeno.



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

Nas aulas anteriores, discutimos sistemas baseados em regras *fuzzy* em que tanto os antecedentes como os consequentes são conjuntos *fuzzy*.

Na aula de hoje, veremos um novo tipo de sistemas baseados em regras *fuzzy* em que os antecedentes são conjuntos *fuzzy* mas os consequentes são funções das variáveis independentes.

Contexto Histórico

Em 1985, Takagi e Sugeno introduziram uma ferramenta para modelagem de sistemas usando a teoria dos conjuntos *fuzzy*.

No mesmo artigo, os autores também discutem duas aplicações industriais: Uma relacionada ao tratamento de água e outra com respeito a produção de ferro.

Em 1988, Sugeno e Kang publicaram novos resultados e apresentaram critérios para ajustar os parâmetros do sistema *fuzzy*.

O método de Takagi-Sugeno, também conhecido como Takagi-Sugeno-Kang, possui aplicações em diversas áreas incluindo: automação e controle, previsão de séries temporais, reconhecimento de padrões e biomatemática.

Exemplo: Lava Roupas

Objetivo:

Automatizar o funcionamento de uma máquina de lavar roupas de modo a economizar água, eletricidade, detergente, etc.

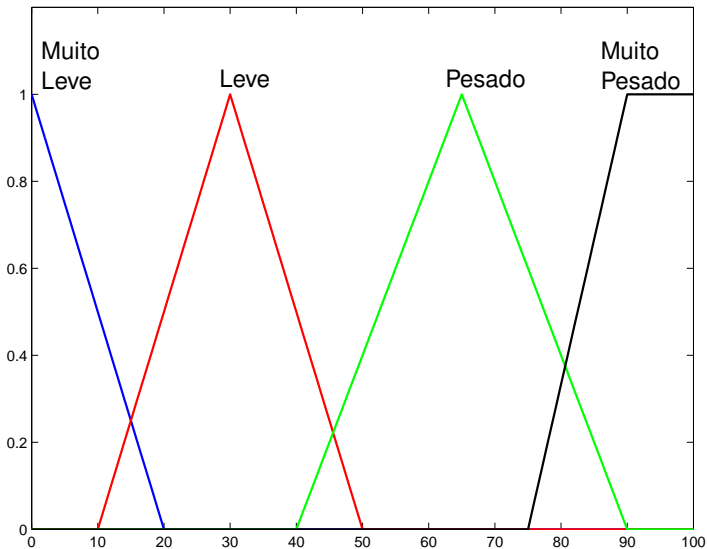
Formulação e Variáveis do Problema:

Conhecido o peso aproximado das roupas e quão sujas elas estão, determinaremos a quantidade de detergente a ser aplicada.

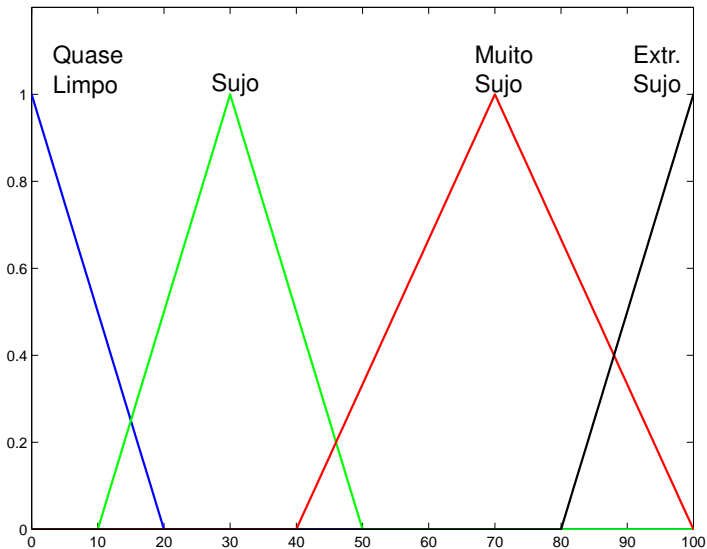
- Variáveis independentes: Peso e sujeira.
- Variável dependente: Quantidade de detergente.

Primeiramente, definiremos conjuntos *fuzzy* para as variáveis independentes.

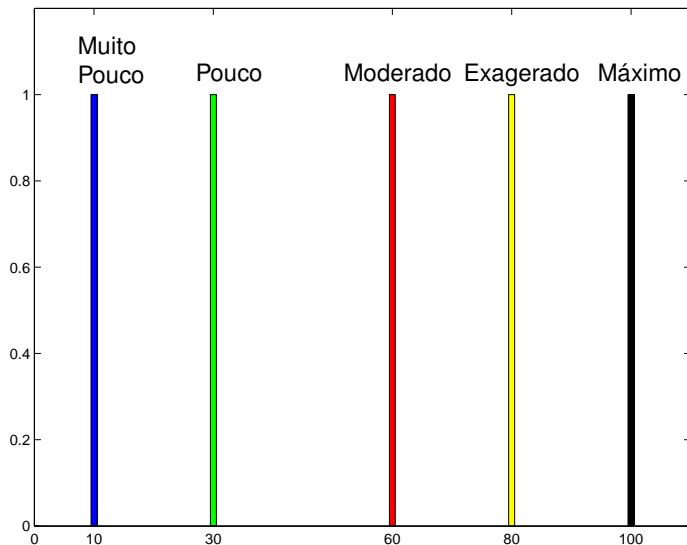
Fuzzificação - Peso



Fuzzificação - Sujeira



Consequente: Quantidade de detergente



Base de Regras *Fuzzy*

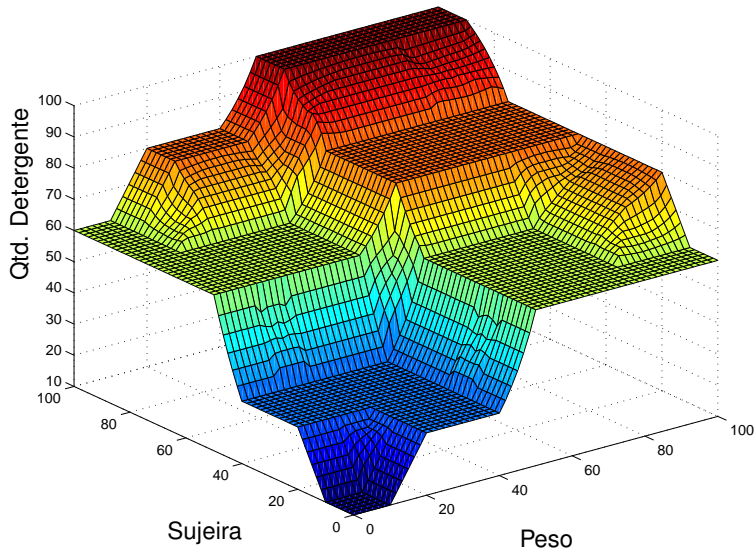
- SE o peso é **muito leve** e a sujeira é **quase limpo**, ENTÃO a quantidade de detergente é **muito pouco**.
- SE o peso é **muito leve** e a sujeira é **sujo**, ENTÃO a quantidade de detergente é **pouco**.
- \vdots
- SE o peso é **pesado** e a sujeira é **muito sujo**, ENTÃO a quantidade de detergente é **exagerado**.
- \vdots
- SE o peso é **muito pesado** e a sujeira é **extremamente sujo**, ENTÃO a quantidade de detergente é **máximo**.

Base de Regras *Fuzzy*

	Quase limpo	Sujo	Muito sujo	Extr. sujo
Muito leve	Muito pouco	Pouco	Moderado	Moderado
Leve	Pouco	Pouco	Moderado	Exagerado
Pesado	Moderado	Moderado	Exagerado	Exagerado
Muito Pesado	Moderado	Exagerado	Máximo	Máximo

Observe que temos 16 regras no total.

Gráfico da Máquina de Lavar Roupas



Método de Inferência

Dado que o peso é $p = 10$ e o nível de sujeira é $s = 15$, determinamos a quantidade de detergente da seguinte forma:

Calculamos a ativação de cada regra da seguinte forma:

$$w_i = \varphi_{A_{1i}}(p) \wedge \varphi_{A_{2i}}(s), \quad \forall i = 1, \dots, 16.$$

Por exemplo, a ativação da primeira regra é:

$$w_1 = \varphi_{\text{Muito Leve}}(p) \wedge \varphi_{\text{Quase Limpo}}(s) = 0.5 \wedge 0.25 = 0.25.$$

Analogamente, a ativação da segunda regra é:

$$w_2 = \varphi_{\text{Muito Leve}}(p) \wedge \varphi_{\text{Sujo}}(s) = 0.5 \wedge 0.25 = 0.25.$$

Todas as outras regras tem ativação nula, ou seja, $w_i = 0$ para $i = 3, \dots, 16$.

A quantidade y de detergente é determinada somando o produto da ativação pelo consequente da regra e dividindo o resultado pelo soma das ativações, ou seja,

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{16} w_i Q_i}{\sum_{i=1}^{16} w_i},$$

em que $Q_i \in \{\text{Muito Pouco, Pouco, Moderado, Exagerado, Máximo}\}$.

Neste exemplo,

$$\begin{aligned} y &= \frac{0.25 \times (\text{Muito Pouco}) + 0.25 \times (\text{Pouco})}{0.5} \\ &= \frac{0.25 \times 10 + 0.25 \times 30}{0.5} = 20. \end{aligned}$$

Este é um exemplo do método de Takagi-Sugeno de ordem zero!

Sistemas Baseados em Regas *Fuzzy*

Um sistema baseado em regras *fuzzy* contém três componentes:

- **Dicionário**, que define conjuntos *fuzzy* sobre as variáveis.
- **Base de regras**, que estabelece uma relação entre as variáveis.
- **Método de inferência**, usado para determinar a saída dado uma certa entrada.

Eventualmente, pode-se acrescentar uma quarta componente, chamada **defuzzificação**, que transforma uma saída *fuzzy* em um número real ou um conjunto clássico.

Esse não é o caso do método de inferência de Takagi-Sugeno!

Modelo de Takagi-Sugeno

Regras Fuzzy de Takagi-Sugeno

No modelo de Takagi-Sugeno, as regras são da forma:

SE x_1 é A_{1i} e x_2 é A_{2i} e ... e x_n é A_{ni} , ENTÃO $y = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

em que $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$ são conjuntos *fuzzy* dos antecedentes enquanto que o conseqüente é uma função das variáveis de entrada.

Geralmente, as funções f_i são polinômios.

- Tem-se um modelo de Takagi-Sugeno de ordem zero se f_i são constantes.
- Tem-se um modelo de Takagi-Sugeno de ordem um se f_i são polinômios de ordem 1.

Inferência de Takagi-Sugeno

Dada uma entrada (x_1, x_2, \dots, x_n) , a saída é

$$y = \frac{\sum_{i=1}^k w_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sum_{i=1}^k w_i},$$

em que

$$w_i = \varphi_{A_{1i}}(x_1) \Delta \varphi_{A_{2i}}(x_2) \Delta \dots \Delta \varphi_{A_{ni}}(x_n), \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

representam as ativações de cada regra *fuzzy*.

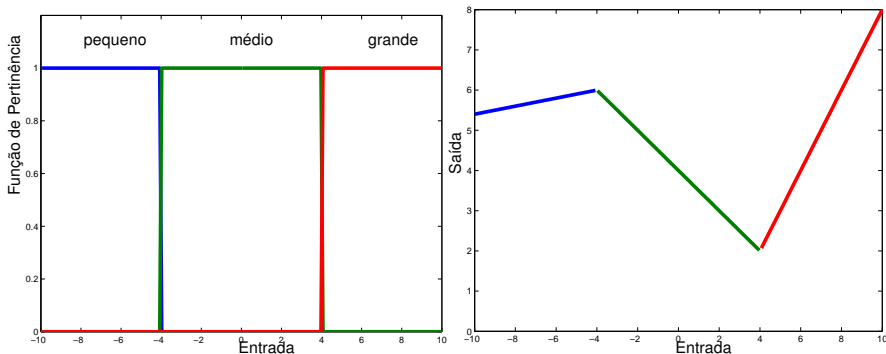
-
- As t-normas mais utilizadas são o mínimo e o produto.
 - As funções de pertinência mais utilizadas são as triangulares e as funções em forma de sino.

Takagi-Sugeno com antecedentes *crisp*

Considere a base de regras:

- SE x é **pequeno**, ENTÃO $y = 0.1x + 6.4$.
- SE x é **médio**, ENTÃO $y = -0.5x + 4$.
- SE x é **grande**, ENTÃO $y = x - 2$.

Considerando intervalos nos antecedentes, obtemos:

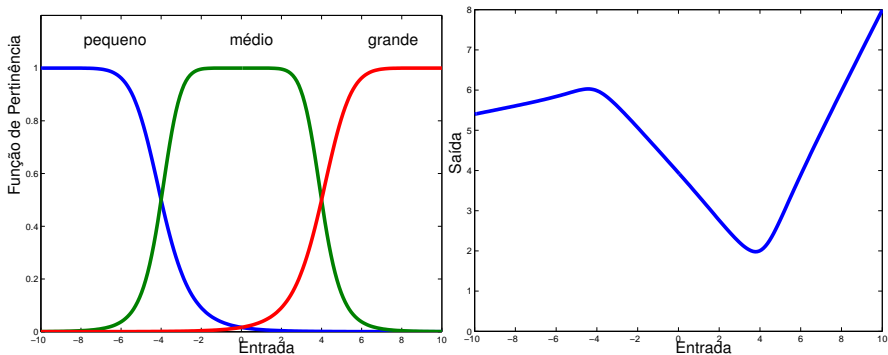


Takagi-Sugeno com antecedentes *fuzzy*

Considere a base de regras:

- SE x é **pequeno**, ENTÃO $y = 0.1x + 6.4$.
- SE x é **médio**, ENTÃO $y = -0.5x + 4$.
- SE x é **grande**, ENTÃO $y = x - 2$.

Considerando conjuntos *fuzzy* nos antecedentes, obtemos:

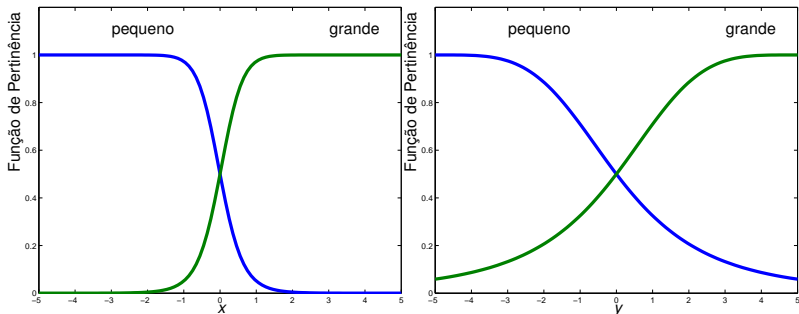


Takagi-Sugeno com antecedentes *fuzzy*

Considere a base de regras:

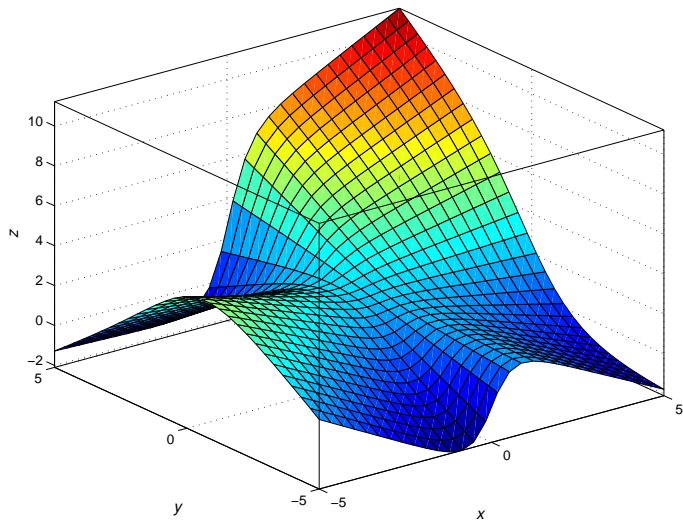
- SE x é **pequeno** E y é **pequeno**, ENTÃO $z = -x + y + 1$.
- SE x é **pequeno** E y é **grande**, ENTÃO $z = -y + 3$.
- SE x é **grande** E y é **pequeno**, ENTÃO $z = -x + 3$.
- SE x é **grande** E y é **grande**, ENTÃO $z = x + y + 2$.

Antecedentes *fuzzy*:



Takagi-Sugeno com antecedentes *fuzzy*

Superfície do modelo de Takagi-Sugeno:



Considerações Finais

Na aula de hoje apresentamos o método de inferência de Takagi-Sugeno. Diferente do método de inferência de Mamdani, os consequentes das regras de um sistema de Takagi-Sugeno são funções das variáveis independentes.

Geralmente, usamos polinômios nos consequentes. Temos um sistema de Takagi-Sugeno de ordem m se os consequentes são polinômios de ordem m .

Na próxima aula, veremos como aplicar o método de quadrados mínimos para ajustar os parâmetros das funções de um sistema do tipo Takagi-Sugeno usando um conjunto de dados.

Muito grato pela atenção!